ATLAS TEMÁTICOS

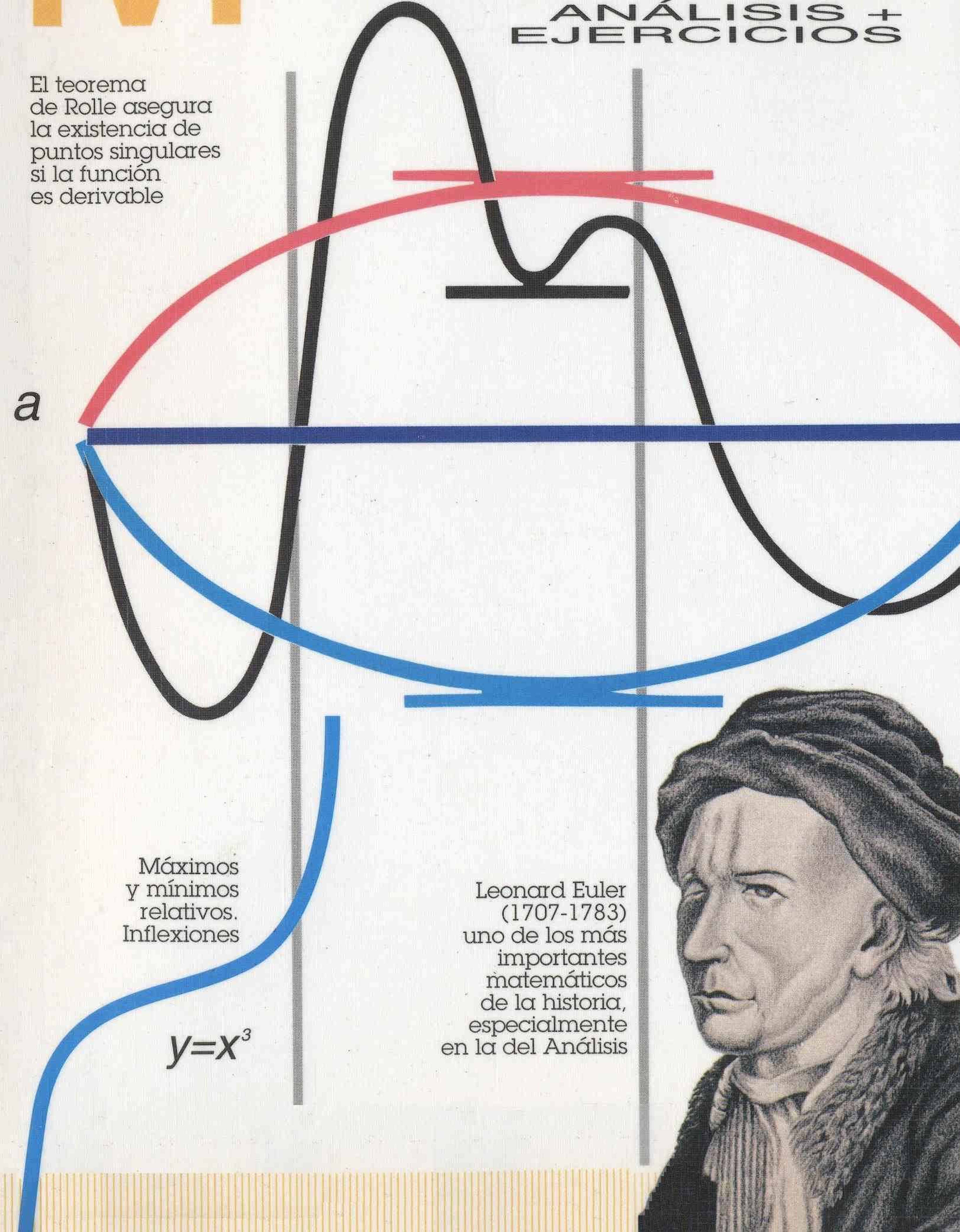
RELACIÓN DE TÍTULOS

MATEMÁTICAS ■ Análisis+ Ejercicios

ATLAS TEMÁTICO

MATEMÁTICAS

ANÁLISIS + EJERCICIOS



El teorema de Rolle asegura la existencia de puntos singulares si la función es derivable

Máximos y mínimos relativos. Inflexiones

Leonard Euler (1707-1783) uno de los más importantes matemáticos de la historia, especialmente en la del Análisis

MATEMÁTICAS

(análisis) + ejercicios

IDEA BOOKS, S.A.

Título de la colección
ATLAS TEMÁTICOS

Redacción / Ferran Hurtado, Licenciado en Matemáticas

Ilustraciones / Equipo editorial

Diseño de la cubierta / Lluís Lladó Teixidó

Printed in Spain by
Emegé, Industria Gráfica, Barcelona

EDICIÓN 1997

PRÓLOGO

Las cuarenta y dos fichas de texto de este libro constituyen una síntesis, con profusión de ilustraciones, del Análisis real de una variable, cubriendo el contenido clásico de esta disciplina en el ciclo medio e inicio del superior. En la serie A se trata del conjunto de los números reales y se define ***C*** *a partir de* ***R*** *x* ***R****, señalándose propiedades que incidirán en temas posteriores. La serie B, elemental sólo en parte de B/1, versa sobre sucesiones y series en* ***R****. La serie C introduce las funciones reales de variable real, siendo C/3, sobre sucesiones y series funcionales, correspondiente al nivel superior. En la serie D se define la continuidad y se comentan los teoremas más significativos. Las cuestiones sobre continuidad uniforme, sucesiones y series de funciones exceden aquí el nivel elemental. La serie E aborda la derivabilidad y varios temas asociados; optimización, gráficas, indeterminaciones, aproximación de raíces, etc. Finalmente, la serie F trata de la integración y de sus aplicaciones a la medida. Las integrales trigonométricas, irracionales e impropias de F/8, F/10 y F/13 se incluyen en el nivel superior, y también los temas de sucesiones y series funcionales que se ven en F/15.*

Aunque el resumen teórico está salpicado de numerosos problemas y ejemplos, allí donde no han tenido cabida, oportunidad o abundancia suficiente se ha recurrido a la amplia colección de ejercicios resueltos del final del volumen, cuya numeración (por ejemplo E/7-3) permite buscarlos a partir de la ficha teórica (en este caso la E-7) o, al revés, retroceder a ella desde el ejercicio, si es que conviene consultarla.

Esperamos que la obra sea de gran utilidad para sus lectores.

EL AUTOR

De los números reales a los complejos

Si el proceso de contar nos conduce a **N**, los números naturales, las necesidades de la medida –de dinero, longitudes, pesos, etc.– conllevan el uso de fracciones, con lo que se llega hasta los números racionales, **Q**. En los primeros tiempos de las matemáticas se creía que dada una unidad, pongamos de longitud, cualquier otra longitud era expresión racional de la unidad anterior. En otras palabras, dos longitudes cualesquiera eran *conmensurables*, es decir, ambas un número natural de veces cierta unidad adecuada. El descubrimiento pitagórico de la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado del cuadrado (véase fig. 1), dio al traste con tal creencia, pero una construcción y comprensión completa de los nuevos números, los irracionales, puestos al descubierto, hubo de esperar hasta el siglo XIX, con Weierstrass, Cantor y Dedekind.

NÚMEROS REALES

El cuerpo de los números reales, que se denota por **R**, es un conjunto que contiene a **Q**, en el que se tienen un conjunto una relación entre sus elementos *(orden)*, denotada $x \leq y$ (o $y \geq x$ indistintamente), que leeremos *x es menor o igual que y* (respectivamente, *y es mayor o igual que x*), y dos operaciones internas, es decir, sendas aplicaciones **R** x **R** → **R**, denotadas

$$(x, y) \to x + y, \ (x, y) \to x \cdot y$$

a las que se da el nombre de *suma* y *producto* de números reales, respectivamente, cumpliéndose los axiomas que a continuación se enumeran. Para mayor sencillez, están distribuidos en cinco grupos, **I** a **V**, e incluso de manera sobreabundante, es decir, puede caracterizarse **R** mediante una colección más reducida de axiomas, de los cuales se deducirán los que nosotros hemos añadido de más, por razones de claridad.

(I). **R**, con la suma y el producto es un *cuerpo conmutativo*. Es decir, se cumple:

I.1. $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in$ **R**.
I.2. $x + y = y + x \quad \forall x, y \in$ **R**.
I.3. Existe un elemento de **R**, que designaremos 0 (cero), tal que $0 + x = x \quad \forall x \in$ **R**.
I.4. Para cada elemento x de **R** existe un elemento de **R**, denotado $-x$, tal que $(-x) + x = 0$.
I.5. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in$ **R**.
I.6. $x \cdot y = y \cdot z \quad \forall x, y, z \in$ **R**.
I.7. Existe un elemento de **R**, que designaremos 1 (uno), distinto de 0, tal que $1 \cdot x = x \quad \forall x \in$ **R**.
I.8. Para cada elemento $x \in$ **R** distinto de 0, existe un elemento de **R**, denotado x^{-1} (o también $\frac{1}{x}$) tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.
I.9 $x \cdot (x + y) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in$ **R**.

(II). **R** está *totalmente ordenado como cuerpo.* Desglosadamente:
II.1. Cualesquiera que sean x, y de **R**, se cumple $x \leq y$ o bien $y \leq x$.
II.2. $x = y$ equivale a que simultáneamente se cumplan $x \leq y$ e $y \leq x$. Escribiremos $x < y$ e $y \leq x$. Escribiremos $x < y$ cuando $x + y$ con $x \leq y$.
II.3. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$, cualesquiera que sean $x, y, z \in$ **R**.
II.4. Si $x, y, z \in$ **R**, de $x \leq y$ se deduce $x + z \leq y + z$.
II.5. Si $x, y \in$ **R** cumplen $x \geq 0$, $y \geq 0$, se tiene $x \cdot y \geq 0$.

(III) El orden es *arquimediano.* Es decir, si x, $y \in$ **R** cumplen $0 < x$, $0 \leq y$, existe $n \in$ **N** tal que $y < n \cdot x$.
Los axiomas de **(I)**, **(II)** y **(III)** son también válidos para **Q**, que también es cuerpo conmutativo totalmente ordenado y arquimediano, por lo que el lector ya está familiarizado con sus consecuencias sencillas y con el lenguaje usado.

(IV). **Q** es denso en **R**. En otras palabras, $\forall x, y \in$ **R** tales que $x < y$ existe un $q_1 \in$ **Q** entre ellos, o sea $x < q_1 < y$. Obsérvese que, por la misma razón, existirán q_2, q_3 etc., con $x < \ldots < q_3 < q_2 < q_1 < y$. En definitiva, entre cada dos reales distintos hay infinitos racionales.

Para formular el axioma (**V**) precisamos ciertas definiciones previas. Sean a y b números reales cualesquiera con $a < b$. Se denomina *intervalo abierto de origen y extremo b* al conjunto de $x \in$ **R** tales que $a < x < b$, denotándose tal conjunto por (a, b). Se llama *intervalo cerrado de origen a y extremo b* al conjunto de $t \in$ **R** tales que $a \leq t \leq b$ y se le denota $[a, b]$. Es habitual llamar *intervalo de centro a y radio h* a $(a - h, a + h)$. Si $c \in$ **R**, se llama entorno de c a cualquier intervalo (a,b) tal que $c \in (a, b)$, en particular los centrados en c.
Aunque no se trate de intervalos, es frecuente denotar $(a, +\infty)$ al conjunto de $x \in$ **R** tales que $a < x$ (y análogamente para $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$ y $(-\infty, a])$.
Utilizaremos también las notaciones

$$\mathbf{R}^+ = (0, +\infty), \ \mathbf{R}^- = (-\infty, 0),$$

conjuntos cuyos elementos son llamados, respectivamente, positivos y negativos.
El conjunto **R** suele representarse gráficamente por una recta, situando x a la izquierda de y cuando $x < y$.

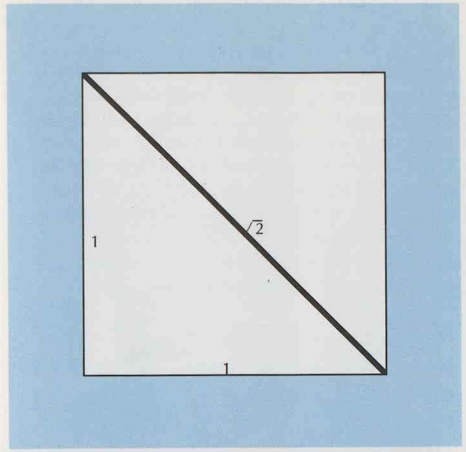


Fig. 1 – La conmensurabilidad significaría la existencia de una longitud *a* tal que

$$\sqrt{2} = ma \quad 1 = na \ (m, n \in \mathrm{N})$$

con lo que, dividiendo, $\sqrt{2} = m/n$ sería racional, lo que es absurdo, pues si la fracción es irreducible elevando al cuadrado *m* y n resultan pares.

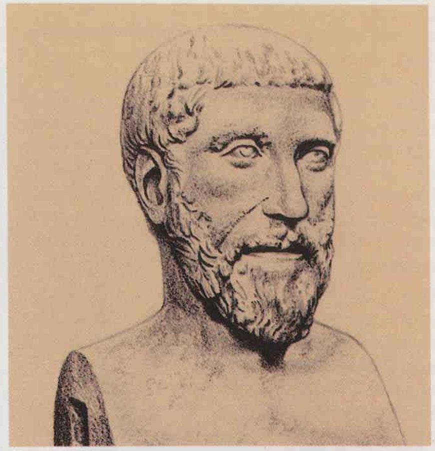


Fig. 2 – Aparte del famoso teorema, la escuela reunida en torno a Pitágoras (s. VI a.C.) hizo su más importante aportación al descubrir la existencia de los números irracionales.

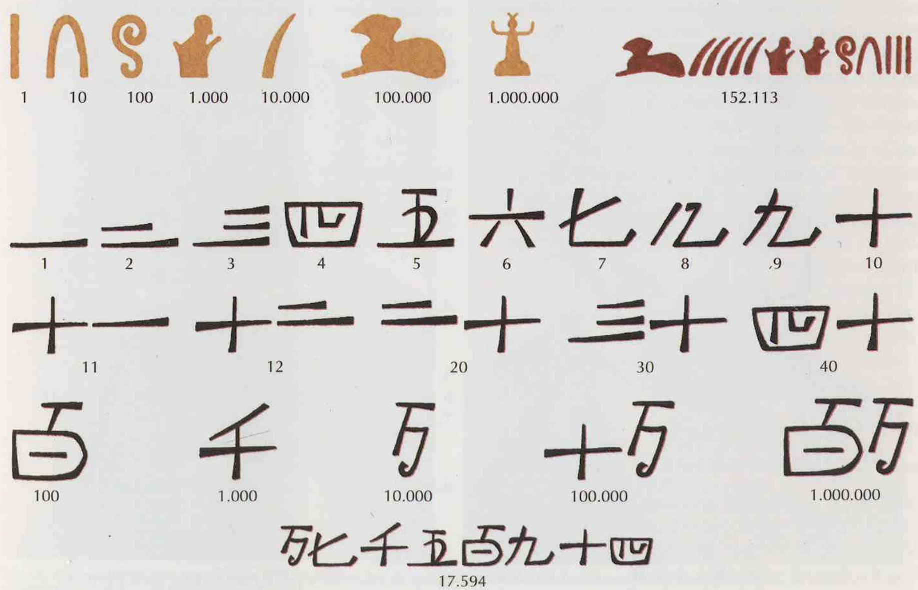


Fig. 3 – Símbolos de numeración (jeroglífica) egipcia (arriba) y china (abajo).

Si A es un subconjunto de $\mathbf{R}$, diremos que b es una *cota superior* de A (o una *mayorante* de A) cuando sea $x \leq b$ para todo x de A. También se dice que A está *acotado superiormente por b*, o *mayorado por b*. Análogamente se definen las *cotas inferiores* o *minorantes*. Un conjunto se dice que está *acotado inferiormente* si existe alguna cota inferior. De estarlo en ambos sentidos se dice, sencillamente, que está *acotado*. Por ejemplo, $\mathbf{R}^+$ está acotado inferiormente, pero no superiormente, $\mathbf{R}^-$ está en situación inversa, $\mathbf{Q}$ no está acotado en ningún sentido, y cualquier intervalo (a, b) lo está en ambos.

Si $A \subset \mathbf{R}$ y existe un elemento $a \in A$ tal que sea cota superior de A (es decir, un elemento de A mayor que todos los restantes de A), diremos que a es el *máximo* de A. Se llamaría *mínimo* de A a una cota inferior de A que perteneciera a A.

Por supuesto que si un conjunto tiene máximo o mínimo está mayorado o minorado, respectivamente, pero, en cambio, el mero hecho de estar acotado superiormente o inferiormente no implica que posea máximo o mínimo, como, por ejemplo, sucede con cualquier intervalo abierto.

Ahora sí estamos en condiciones de formular el axioma de $\mathbf{R}$ que nos faltaba:

(V). Si un subconjunto A de $\mathbf{R}$, no vacío, está acotado superiormente, el conjunto M de las mayorantes de A posee elemento mínimo.

La menor de las cotas superiores de A, si existe, se llama *extremo superior de A* (o también *supremo de A*). El axioma V, o *axioma del extremo*, dice que todo subconjunto de $\mathbf{R}$ no vacío y acotado superiormente posee extremo superior. Consecuencia inmediata es que cualquier subconjunto de $\mathbf{R}$ minorado y no vacío posee *extremo inferior* (también llamado *ínfimo*), es decir, elemento máximo entre sus cotas inferiores.

El axioma **V** no se cumple en $\mathbf{Q}$. Por ejemplo, el conjunto de números racionales cuyo cuadrado es menor que 2, es no vacío y está acotado en $\mathbf{Q}$, pero carece de extremos racionales. Al sumergir $\mathbf{Q}$ en $\mathbf{R}$ sí aparecen extremos: $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

Para cada $x \in \mathbf{R}$ se define

$$\text{valor absoluto de } x = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

siendo sus principales propiedades

(*a*) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$. $|x| = 0$ equivale a $x = 0$.

(*b*) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$.

(*c*) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$.

(*d*) $|x - y| \geq |x| - |y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$.

La reforma del Análisis, comenzada por Bolzano y Cauchy, se completó en la segunda mitad del siglo XIX en torno a Weierstrass, cuya construcción de los números reales parte, como la de Cantor-Heine y la de Dedekind, de $\mathbf{Q}$. El método de este último, el que más conecta con la antigüedad clásica, consiste en considerar *cortaduras* de $\mathbf{Q}$, es decir, particiones de $\mathbf{Q}$ en dos subconjuntos A_1 A_2 no vacíos y disjuntos, tales que cualquier elemento de A_1 minore A_2. Cada una de estas cortaduras hace de número real en la construcción de Dedekind. En definitiva, cada $\alpha \in \mathbf{R}$ queda individualizado por los racionales menores que él y los mayores o iguales. Lo difícil estriba en construir estos conjuntos antes de que exista α.

NÚMEROS COMPLEJOS

En virtud de la regla de los signos, el cuadrado de cualquier real es un número positivo, o nulo. Por ello, no existe en $\mathbf{R}$ raíz cuadrada de los negativos. Sin embargo, es posible construir un conjunto, el de los *números complejos*, en cuyo asentamiento se distinguieron Gauss, Hamilton y Cauchy, que contiene como subconjunto a $\mathbf{R}$, en el que tal problema tiene solución.

Definición y operaciones

Consideremos el conjunto $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ formado por los pares ordenados (a, b) de números reales (el contexto evita, pese a las notaciones coincidentes, la confusión con los intervalos). Se definen una suma y un producto mediante

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

cumpliéndose, $\forall\, a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$,

1. $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$

2. $[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$

3. El elemento $(0, 0)$ cumple

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

4. Para cada $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se tiene

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0).$$

5. $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$

6. $(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f)$

7. El elemento $(1, 0)$ cumple

$$(1, 0) \cdot (a, b) = (a, b)$$

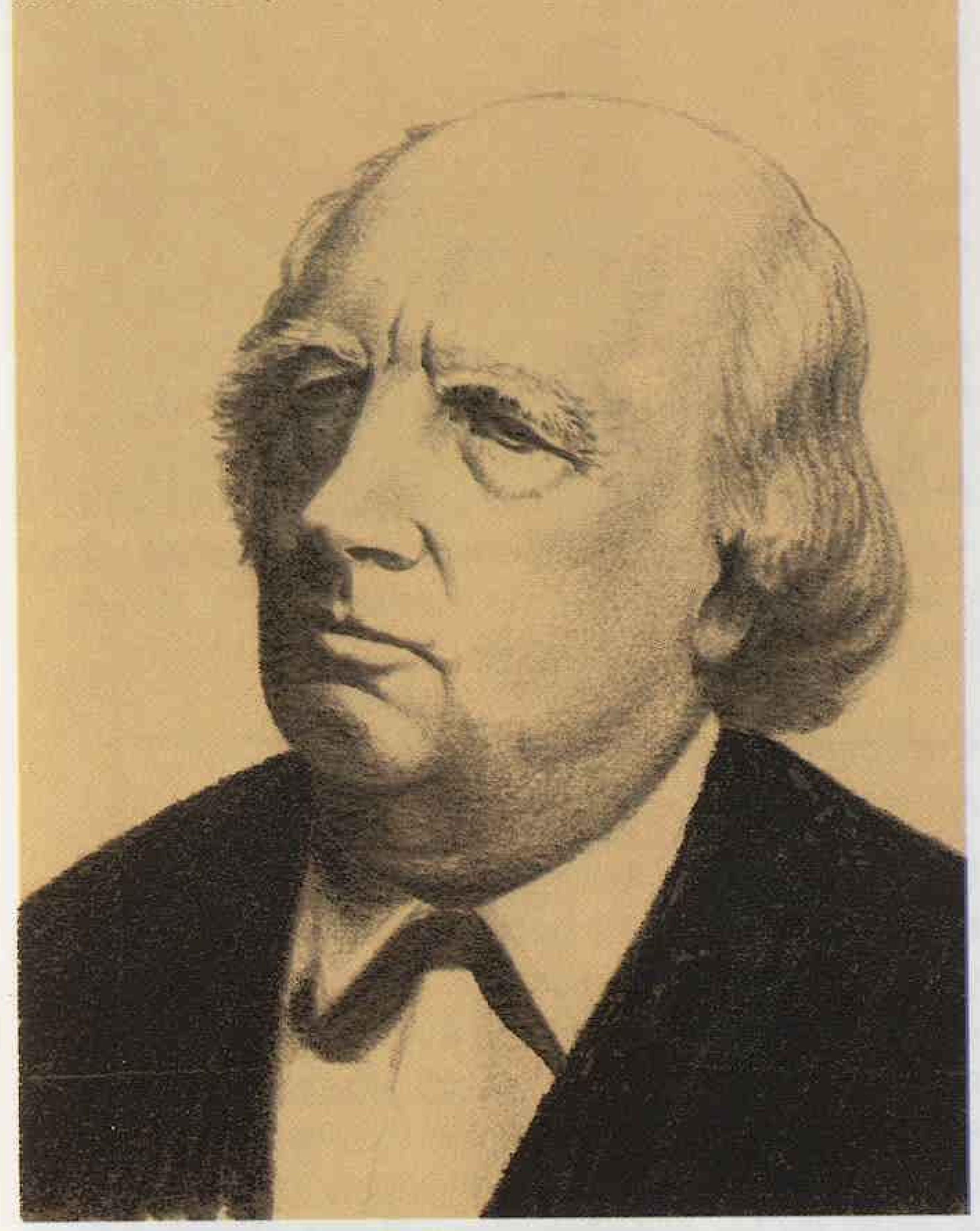
8. Para cada (a, b) de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ distinto de $(0, 0)$,

$$(a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0)$$

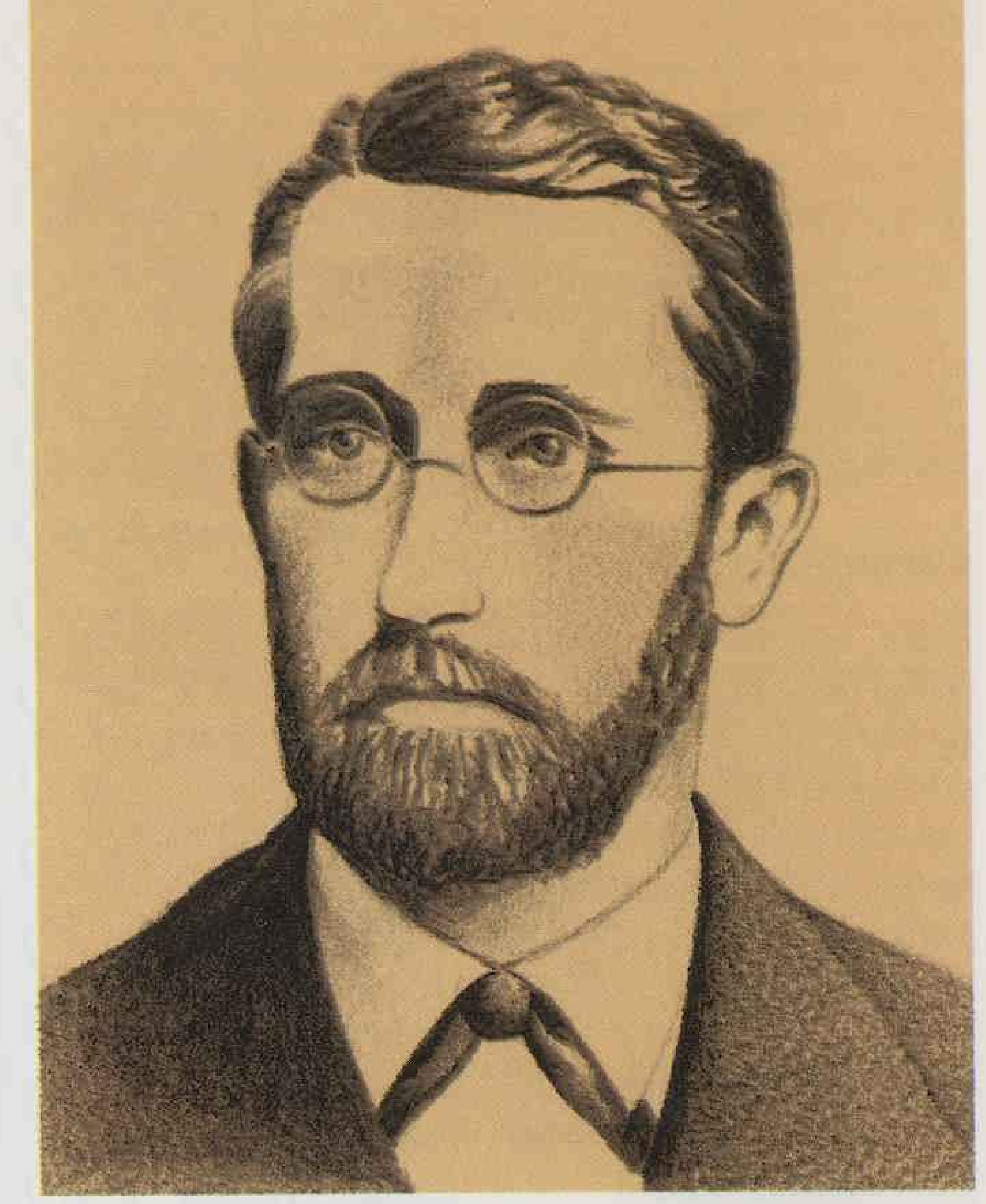
9. $(a, b) \cdot [(c \cdot d) + (e, f)] = (a, b)\,(c, d) + (a, b)\,(e, f)$

$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, estructurado como cuerpo conmutativo con las anteriores operaciones, es denotado $\mathbf{C}$, y sus elementos llamados *números complejos*.

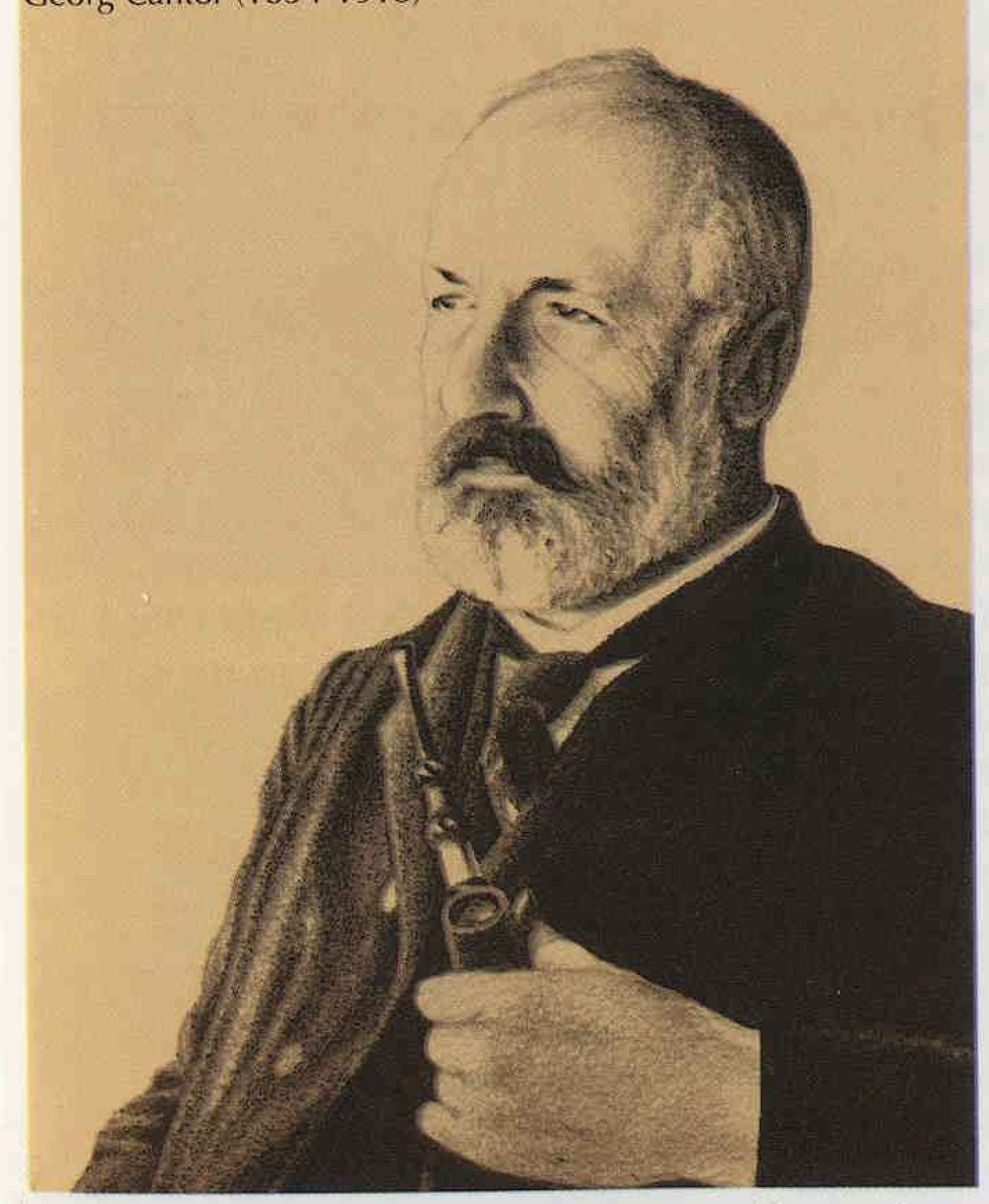
Karl Weierstrass (1815-1897)



Richard Dedekind (1831-1916)



Georg Cantor (1854-1918)



William Rowan Hamilton (1805-1865)

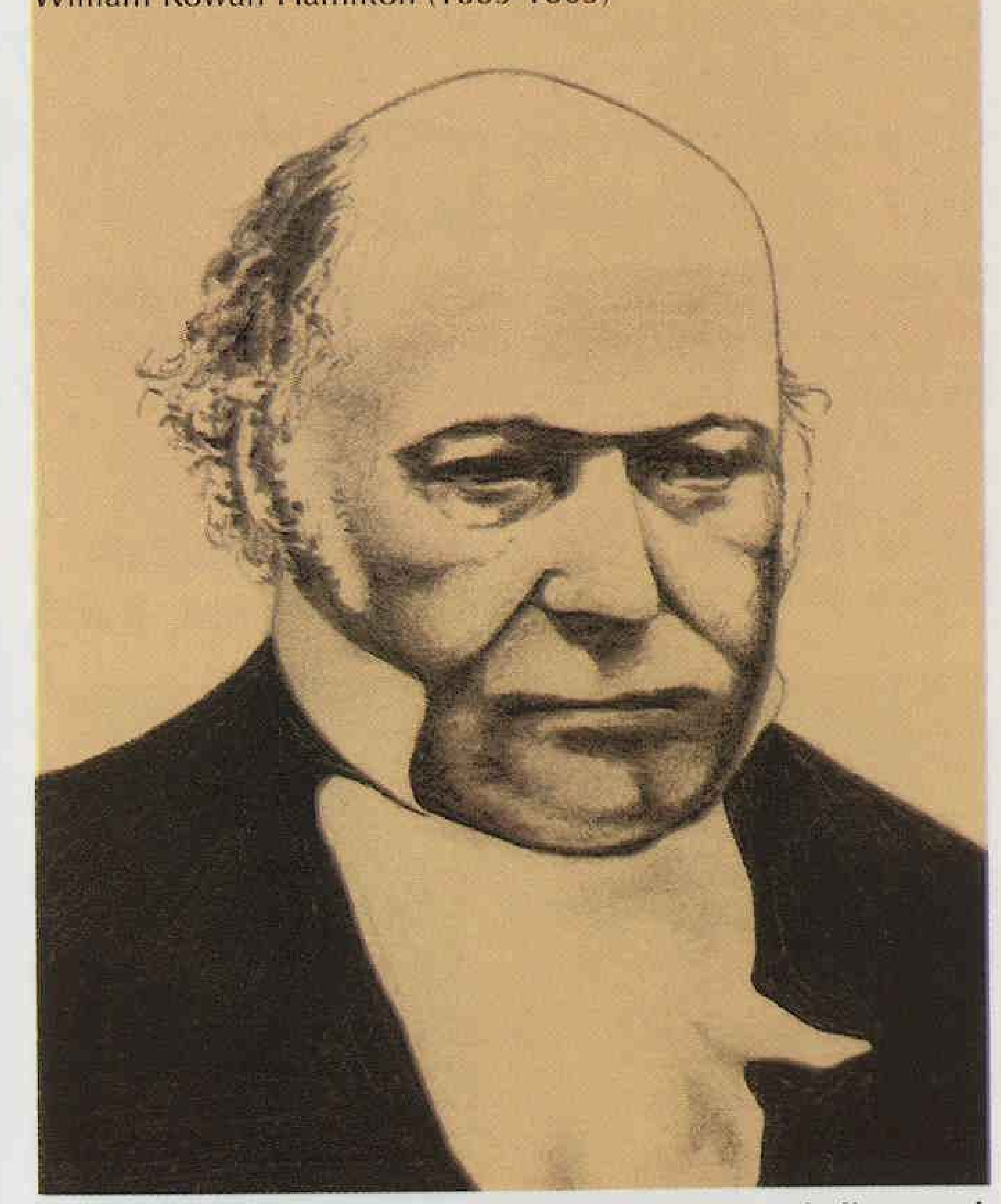


Fig. 1 – Matemáticos que, en el siglo XIX, movidos por la preocupación de los fundamentos de la Matemática, se dedicaron al estudio de la construcción de los conjuntos numéricos.

Representación gráfica

Los números complejos, que, como conjunto, despojados de sus operaciones, constituyen **R** x **R**, pueden representarse como los puntos de un plano coordenado mediante dos ejes perpendiculares, en cuya intersección se toma el 0 de ambas rectas reales (fig. 1), identificándose (a, b) con el punto por el que al trazar las paralelas a los ejes, cortan al primero, o de abscisas, en el punto de coordenada a, y al segundo, o de ordenadas, en el punto de coordenada b. Suponemos al lector familiarizado con este tratamiento del plano.

Conjugación

Dado un número complejo $z = (a, b)$ se llama parte real de z al número real a y parte imaginaria de z al número real b. Se llama complejo conjugado de $z = (a, b)$ al número $\bar{z} = (a, -b)$ que tiene la misma parte real y la parte imaginaria cambiada de signo. Los complejos de parte real nula se llaman *imaginarios puros.*
La aplicación $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ que hace corresponder a cada número real a el complejo $(a, 0)$, de parte real a y parte imaginaria nula, asocia a diferentes números reales diferentes números complejos. Además, como

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),\ (a, 0)\,(b, 0) = (ab, 0),$$

puede identificarse cada real x con el complejo $(x, 0)$. O sea, $x = (x, 0)\ \forall\ x \in \mathbf{R}$.
Con ello, se tiene la cadena de inclusiones

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

El número complejo (0,1) se designa por la letra i, recibiendo el nombre de unidad imaginaria. Se cumple

$$i^2 = (0, 1)\,(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

por lo que en **C** sí es posible hallar raíces cuadradas de los reales negativos:

$$\text{si } x \in \mathbf{R}^-,\ (\pm\, i\sqrt{-x}\,)^2 = x.$$

Cualquiera que sea $(a,b) \in \mathbf{C}$ se cumple

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)\,(0, 1),$$

igualdad que con los convenios y notaciones anteriores, escribiremos

$$(a, b) = a + b\,i.$$

El segundo término de esta igualdad, o *expresión binómica* del complejo (a, b), es la que más se usa. El número queda descrito como suma de un real, a, y de un imaginario puro, bi. Con esta notación, las operaciones en C se hacen cómodamente, usando la estructura de cuerpo y que $i^2 = -1$.

Teorema fundamental del álgebra. Toda ecuación polinómica de coeficientes complejos tiene al menos una solución en **C**.
Se sigue que

$$a_n x^n + \dots + a_1\, x + a_0 = 0 \quad (a_i \in \mathbf{C},\ a_n \neq 0)$$

tiene exactamente n soluciones en **C**, eventualmente coincidentes entre sí.
Si los coeficientes a_i son reales, las soluciones pueden ser unas reales y otras complejas, pero en este segundo caso con cada solución $a + bi$ $(b \neq 0)$, se presenta también la conjugada, $a - bi$, admitiendo el polinomio el divisor $((x - a)^2 + b^2)$, que es primo entre los polinomios de coeficientes reales. Como consecuencia, si n es impar habrá, por lo menos, una solución real.

Coordenadas polares del plano. Aplicación a C

Cada punto del plano cartesiano puede describirse, además de por su abscisa x y su ordenada y (coordenadas cartesianas), por sus *coordenadas polares,* r y φ, donde φ es el ángulo medido desde el semieje positivo de abscisas hasta la semirrecta por el punto desde el origen, y r es la distancia entre el punto y el origen (fig. 3).
A partir de las coordenadas polares obtenemos las cartesianas mediante

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

e, inversamente, se tiene

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}\,.$$

Puesto que $\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\,(\varphi + \pi)$, la determinación de φ a partir de (x, y) deberá tener también en cuenta el cuadrante en que esté situado el punto.
La ecuación de algunas curvas es especialmente sencilla cuando se usan coordenadas polares. Por ejemplo, $r = K$ es la circunferencia de centro en el origen y radio K.
Cuando cada número complejo $a + bi$ se identifica con el punto (a,b) del plano cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, también podrá describirse por sus coordenadas polares $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (llamada *módulo* del número complejo) y $\mathrm{tg}\,\varphi = (b/a)$ (φ es el *argumento* del número). Se escribe $a + bi = r_\varphi$.
Las propiedades del módulo $|z|$ de $z \in \mathbf{C}$ son
(*a*) $|z| \geq 0 \quad z \in \mathbf{C}$ y $|z| = 0$ equivale a $z = 0$.
(*b*) $|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad z, z' \in \mathbf{C}$.
(*c*) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad z, z' \in \mathbf{C}$.
(*d*) $|z - z'| \geq |z| - |z'| \quad z, z' \in \mathbf{C}$.
(obsérvese que si $z \in \mathbf{C}$ es además real, su módulo es exactamente su valor absoluto).
Es cómodo utilizar

$$r_\varphi \cdot s_\psi = (rs)_{\varphi+\psi},\ \frac{r_\varphi}{s_\psi} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\varphi-\psi},\ (r_\varphi)^n = (r^n)_{n\varphi}.$$

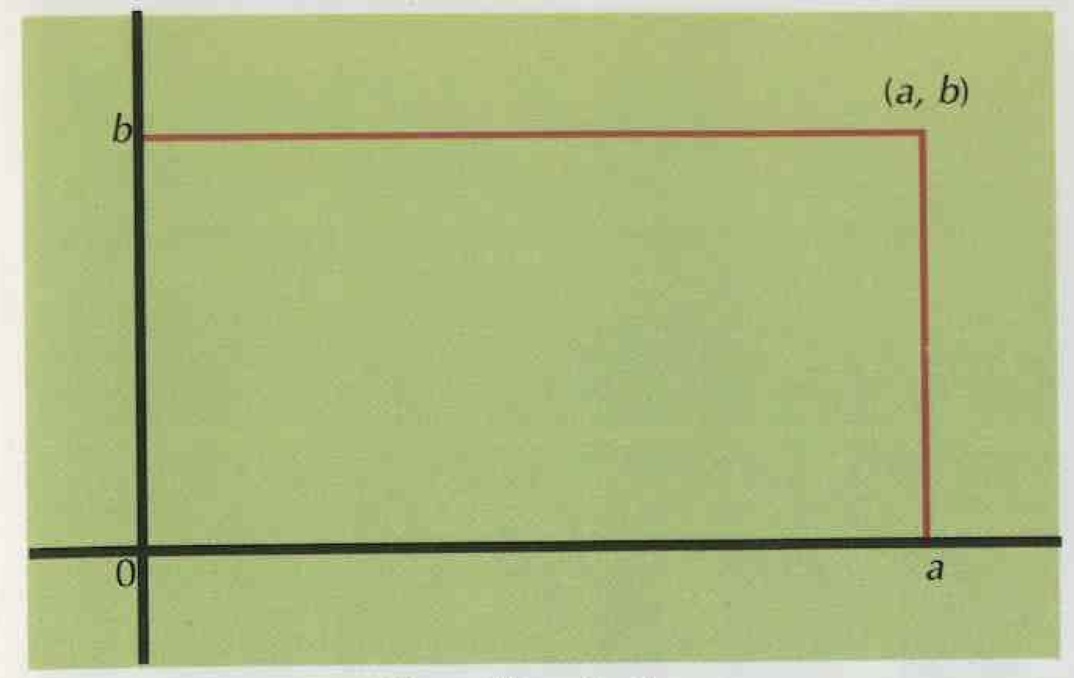


Fig. 1 – Representación gráfica de C.

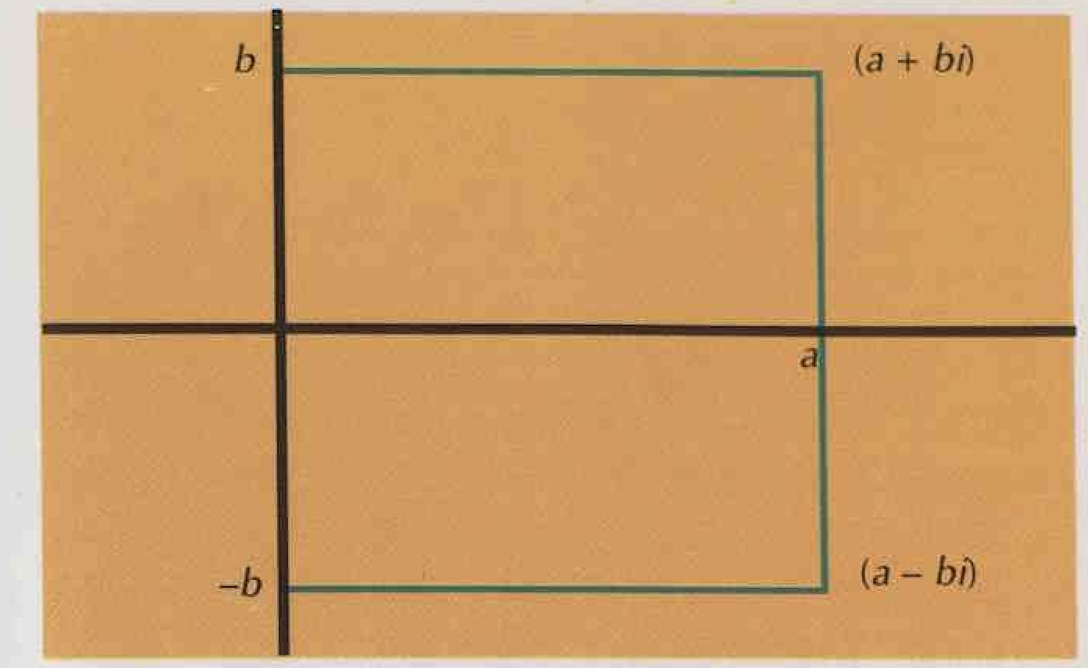


Fig. 2 – Conjugación.

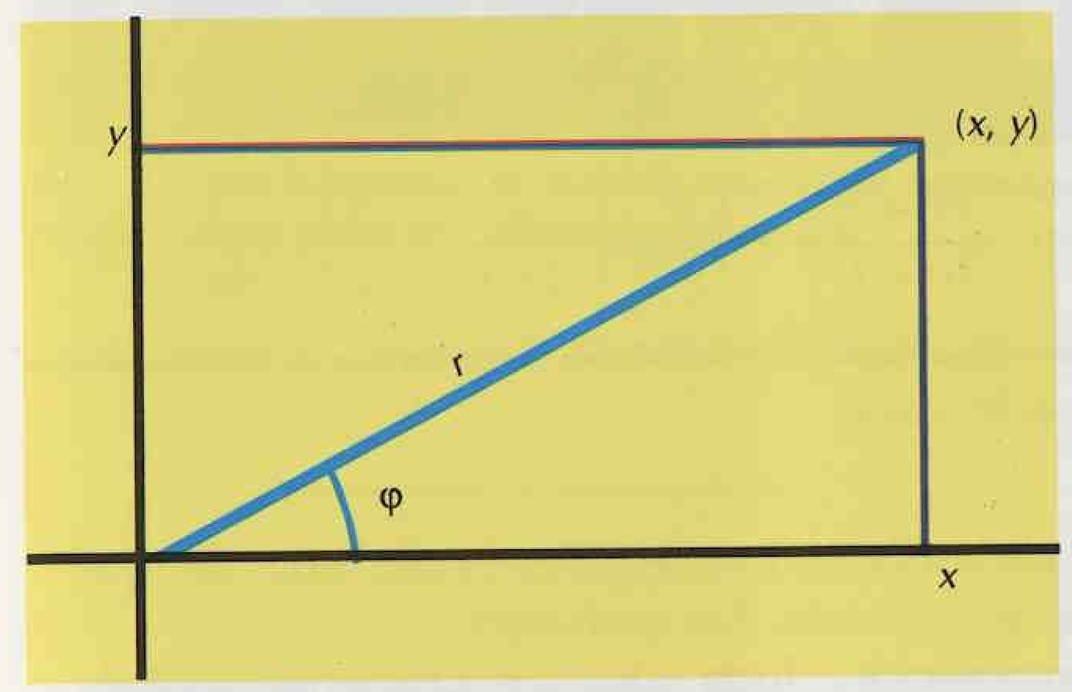


Fig. 3 – Coordenadas polares.

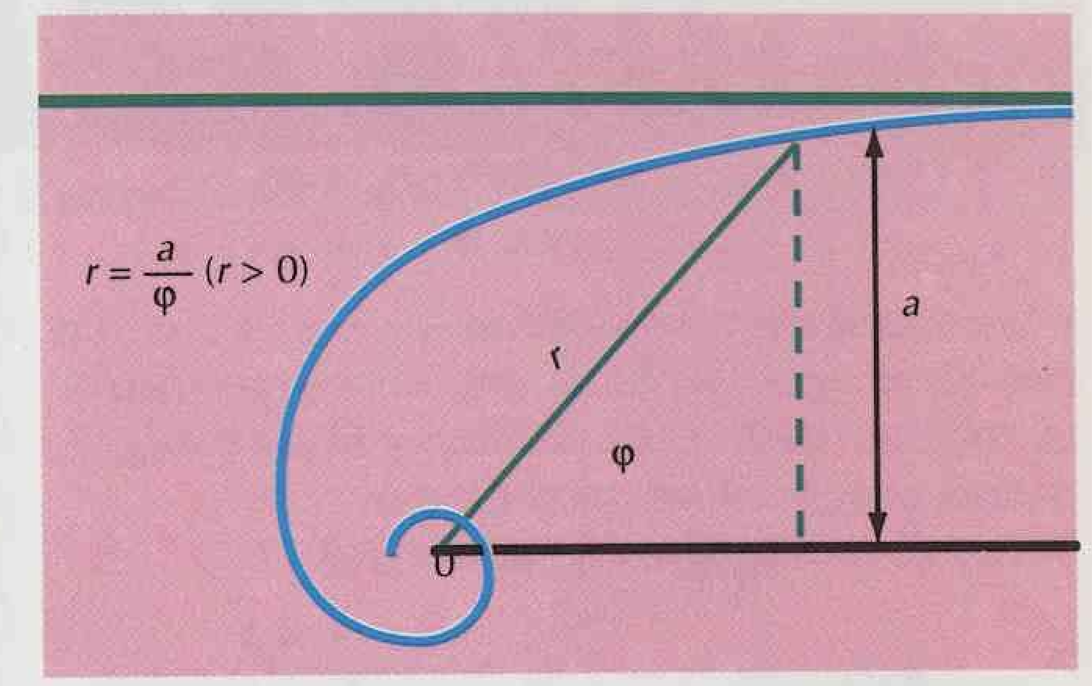


Fig. 4 – Espiral hiperbólica.

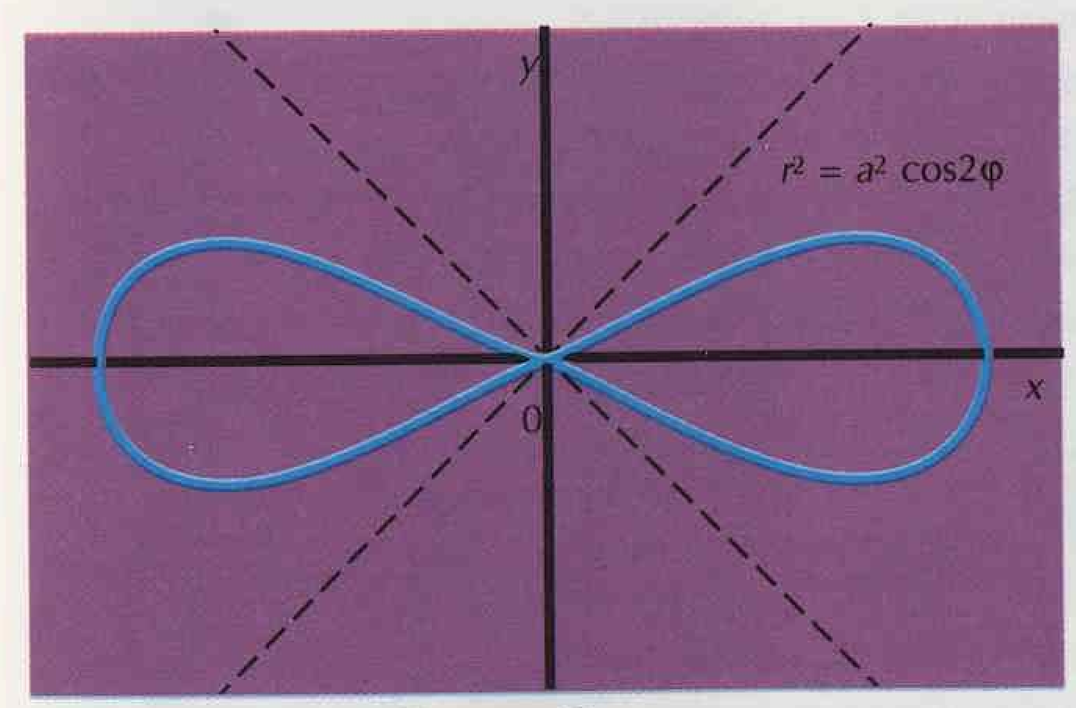


Fig. 5 – Lemniscata de Bernoulli.

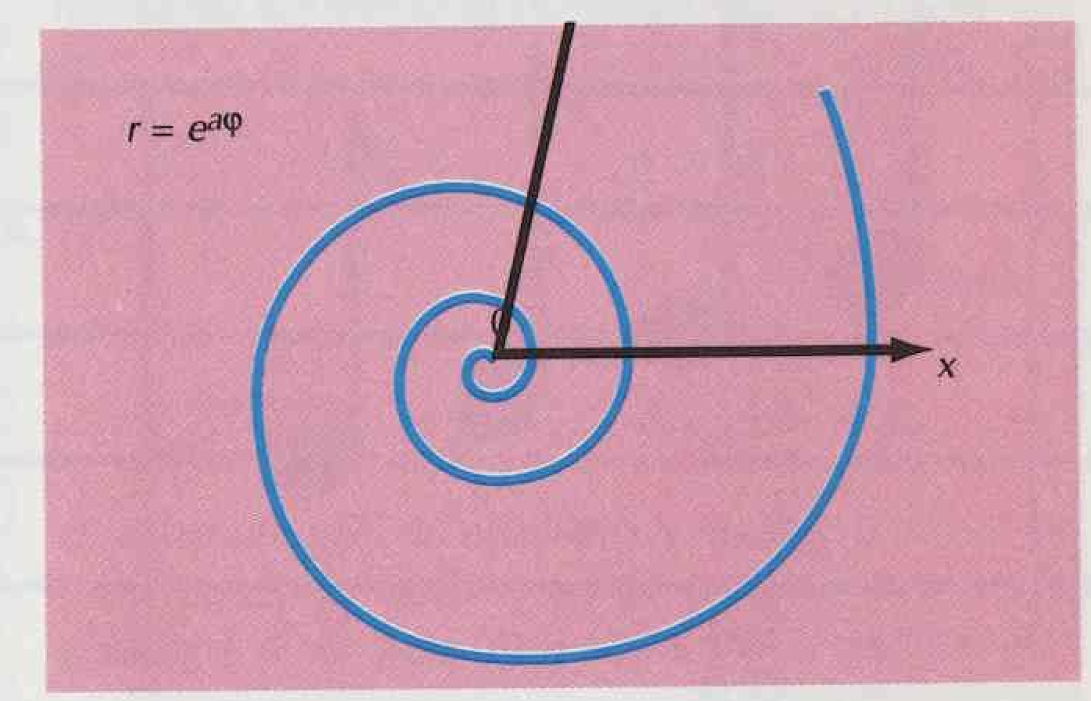


Fig. 6 – Espiral logarítmica.

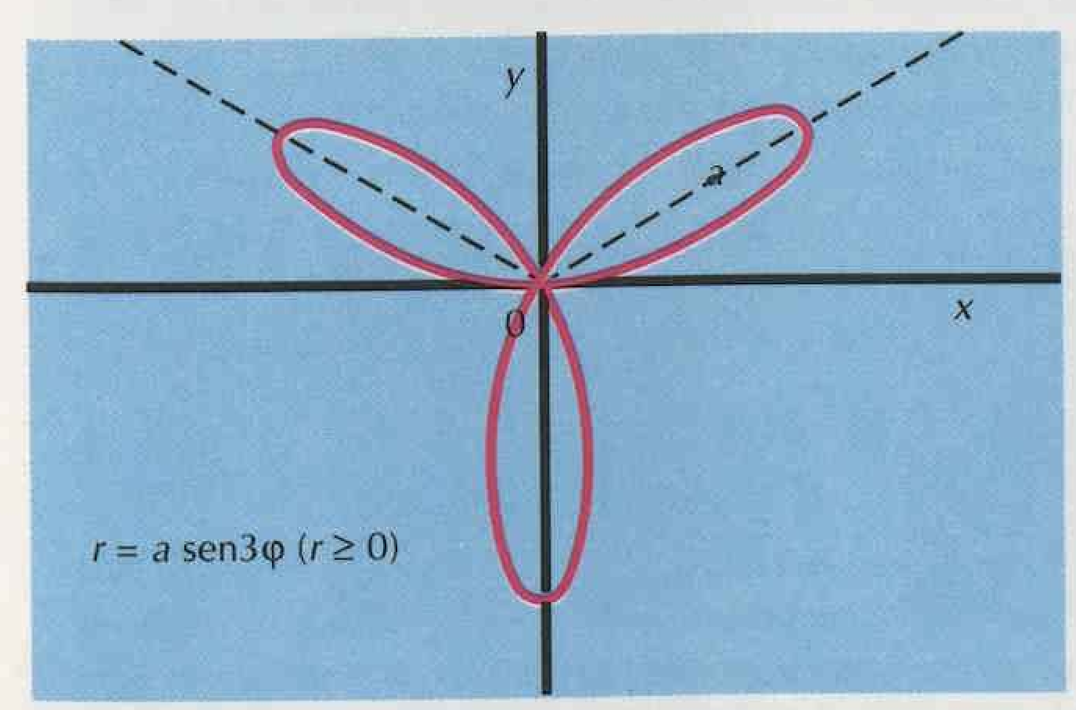


Fig. 7 – Rosa de tres pétalos.

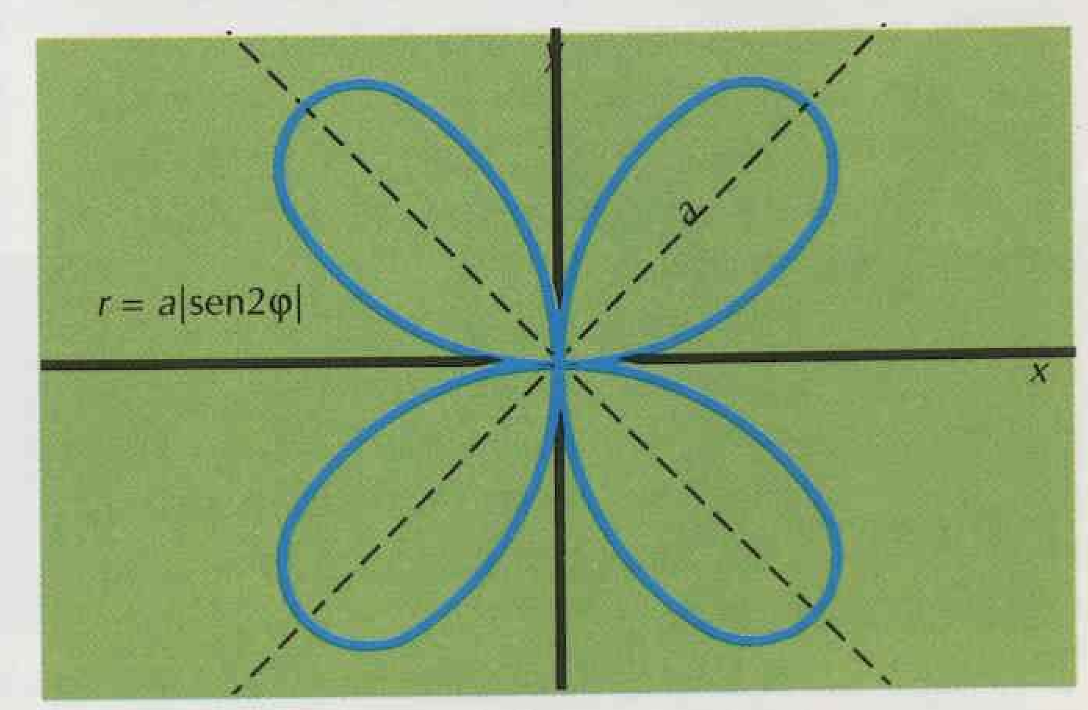


Fig. 8 – Rosa de cuatro pétalos.

Sucesiones y series

SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

Una *sucesión* de números reales es una aplicación f: **N** → **R**. Es frecuente referirse a una sucesión

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

también denotada por $\{a_n\}$, sobrentendiendo la aplicación f tal que $f(n) = a_n$, para cada $n \in \mathbf{N}$. Se denomina primer término de la sucesión a a_1, segundo a a_2, etc. El término enésimo, a_n, es llamado también *término general*.

Los ejemplos más clásicos los constituyen las sucesiones $a_n = an + b$, con a y $b \in \mathbf{R}$, llamadas *progresiones aritméticas*, caracterizables también por ser constante la diferencia *(razón)* entre cada término y el anterior, pues

$$a_{n+1} - a_n = (a(n+1) + b) - (an + b) = a,$$

y las sucesiones de la forma $b_n = s \cdot r^n$, en las que se ve fácilmente es una constante *(razón)* el cociente entre cada término y el anterior, llamadas *progresiones geométricas*.

Si $\{a_n\}$ es una progresión aritmética

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2},$$

y si $\{b_n\}$ es una progresión geométrica de razón r, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \frac{b_1 - rb_n}{1 - r},$$

y también

$$\prod_{i=1}^{n} b_i = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = \sqrt{(b_1 \cdot b_n)^n}.$$

Se pueden sumar y multiplicar dos sucesiones término a término obteniéndose una sucesión, y dividirlas si todos los términos de la segunda son distintos de 0.

Una sucesión se dice que es *acotada superiormente* cuando existe un número (*cota*) mayor o igual que todo término de la sucesión. Análogamente se define la acotación inferior. Cuando se cumplen ambas se habla, sin más, de sucesiones *acotadas*.

Si una sucesión cumple $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ se dice que es *creciente*, y *estrictamente creciente* cuando $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Análogamente se define el decrecimiento, estricto o no. Las sucesiones *constantes* son las que tienen todos sus términos iguales entre sí.

Un número real a será llamado *límite* de la sucesión $\{a_n\}$ si para cada $\varepsilon > 0$ puede hallarse un natural ν tal que de a_ν en adelante los términos de la sucesión difieran de a en menos de ε. Es decir, si $n \geq \nu$ entonces $|a_n - a| < \varepsilon$. Puesto que ε puede tomarse arbitrariamente pequeño, el límite puede concebirse intuitivamente como un valor al cual se parecen tanto como sea imaginable los términos de la sucesión, según ésta avanza. Por ello, será natural tener:

Proposición. El límite de una sucesión, si existe, es único.

Diremos que una sucesión es *divergente* si carece de límite y *convergente* si lo tiene. Si el límite es a, escribiremos

$$\lim a_n = a \text{ o bien } a_n \to a,$$

siendo también frecuente decir que a_n tiende a a.

• Ejemplo.

$$\lim \cdot \frac{7n+3}{2n+1} + \frac{7}{2}, \text{pues} \left| \frac{7n+3}{2n+1} - \frac{7}{2} \right| = \frac{1}{4n+2} < \varepsilon$$

desigualdad ciertamente satisfecha a partir del n adecuado.

Toda sucesión convergente es acotada, aunque no al contrario. Sin embargo,

Proposición. Toda sucesión creciente acotada superiormente (o decreciente acotada inferiormente) es convergente.

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es *fundamental* si para cada $\varepsilon > 0$ puede hallarse un natural ν tal que si p, q son mayores que ν, entonces $|a_p - a_q| < \varepsilon$. De forma imprecisa, pero intuitiva, las sucesiones fundamentales son aquellas cuyos términos son cada vez más parecidos entre sí. Pues bien:

Proposición (Criterio de Cauchy). Una sucesión es convergente si, y sólo si, es fundamental.

Este criterio, que permite conocer la convergencia sin saber el límite, se cumple por tratarse de números reales (que por ello constituyen un *cuerpo completo*), mas no sería así si nos constriñéramos, por ejemplo, a **Q**.

Decimos que una sucesión *diverge a "más infinito"* cuando para cada número positivo M existe un término de la sucesión tal que todos los siguientes son mayores que M. En tal caso escribiremos $\lim a_n = +\infty$. Análogamente escribiremos $\lim a_n = -\infty$ para indicar que

$$\forall M < 0 \quad \exists \nu \in \mathbf{N} \text{ tal que } a_n < M \text{ si } n > \nu$$

Cuando $\{a_n\}$ no tenga límite $+\infty$ ni $-\infty$ pero $\lim |a_n| = +\infty$ diremos que $\lim a_n = \infty$ (sin signo). Debe tenerse presente que $+\infty$, $-\infty$ e ∞ no son números reales, por lo que "tener límite infinito" es una expresión simbólica que no corresponde a una sucesión convergente.

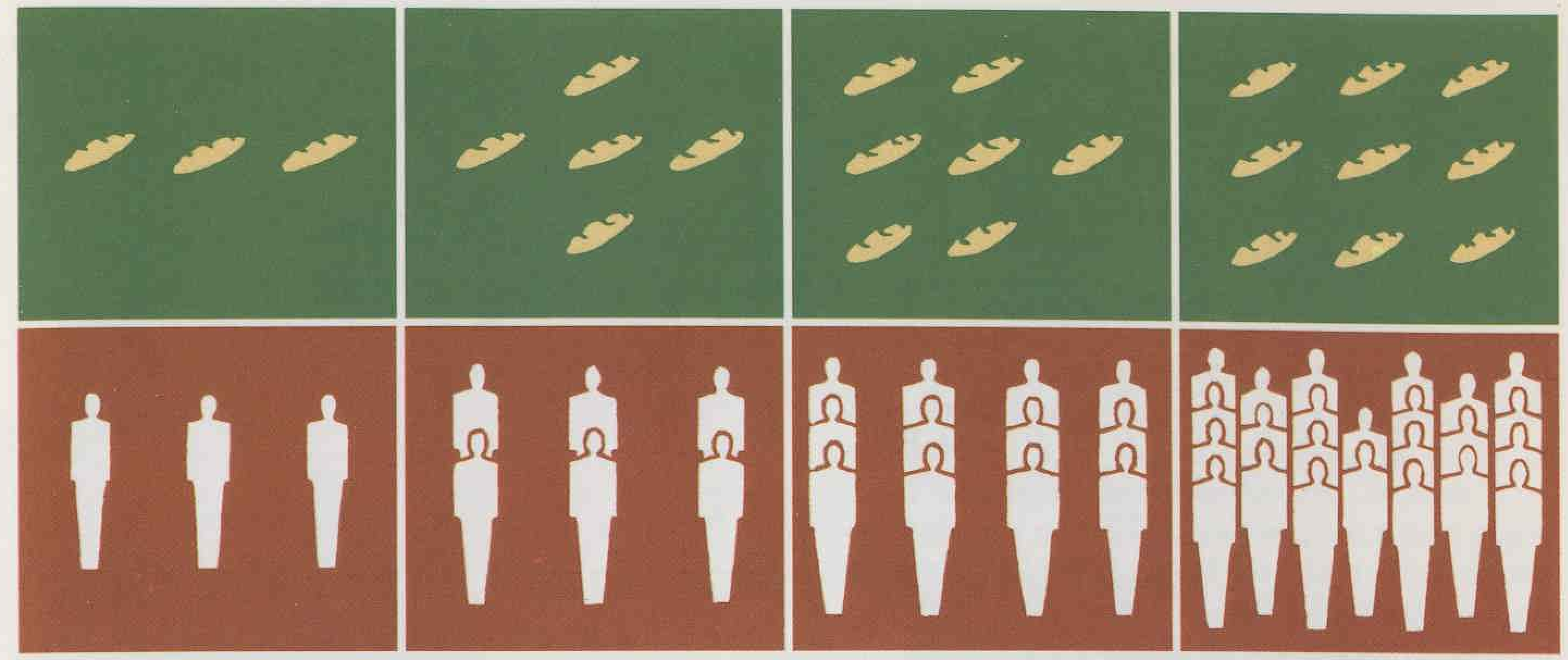


Fig. – 1 Según la hipótesis de Malthus, mientras el crecimiento de la población está siguiendo una progresión geométrica, los alimentos crecen según una progresión aritmética.

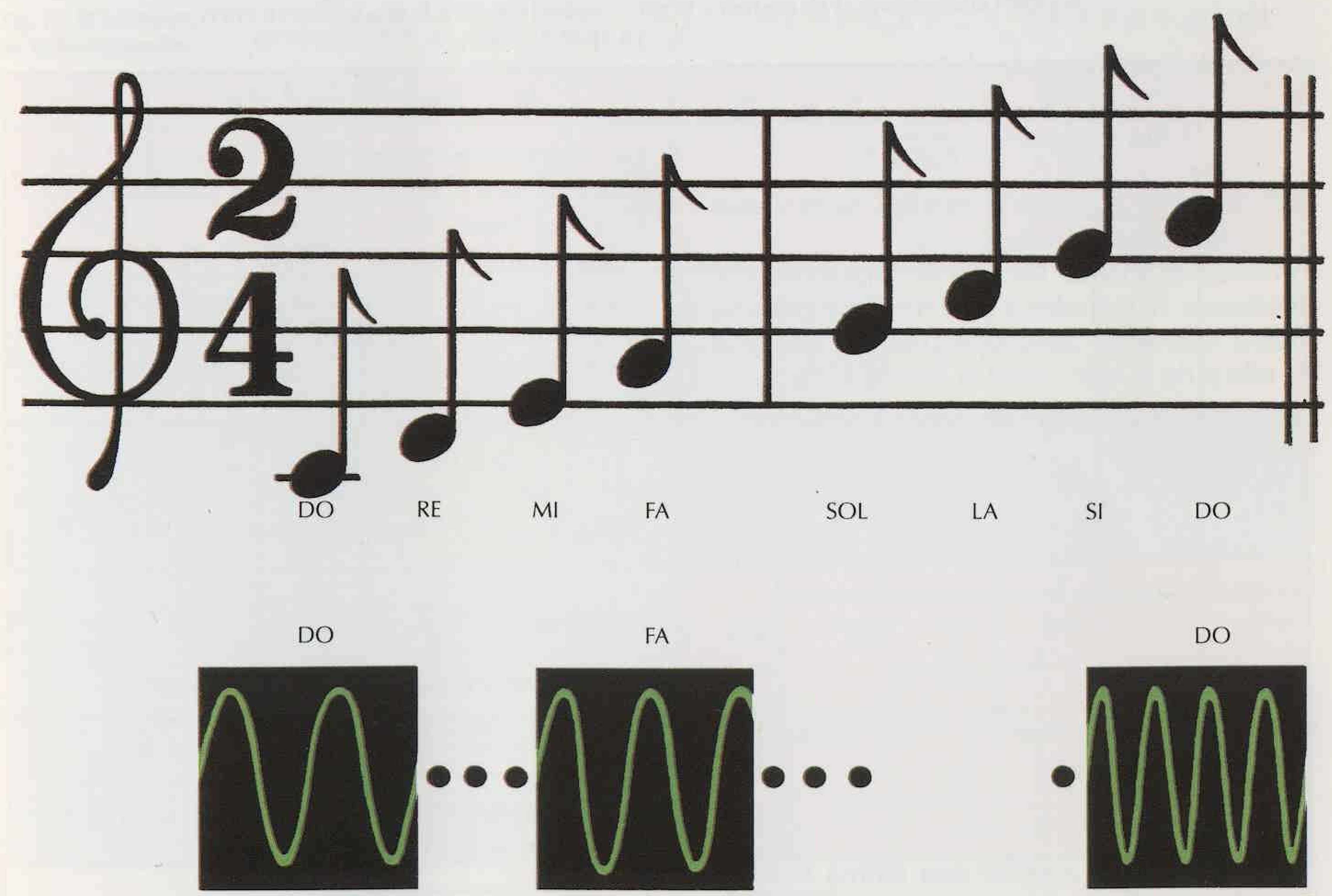


Fig. 2 – Las frecuencias de vibración que caracterizan las notas musicales constituyen una sucesión geométrica de razón $\sqrt[12]{2}$ (de medio tono en medio tono), duplicándose la frecuencia entre cada nota y la misma de la siguiente escala.

CÁLCULO DE LÍMITES DE SUCESIONES

Si $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$ entonces

$$\lim(a_n+b_n)=a+b, \lim(a_n \cdot b_n)=a \cdot b, \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

teniendo esta última igualdad sentido para $b \neq 0$; en caso contrario se distingue

$$\lim b_n = 0^+ \quad \text{o} \quad \lim b_n = 0^-$$

que indican, respectivamente, que los términos de la sucesión son positivos o negativos de cierto lugar en adelante. Si $a \neq 0$ el resultado es $+\infty$, $-\infty$ o ∞, determinándose el posible signo según que a sea positivo o negativo y el denominador 0, 0^+ o 0^-, mediante la regla aritmética de los signos. Si ambas sucesiones tienen límite 0, el límite del cociente es *indeterminado*, lo cual significa que puede exisitir o no, y su valor depende de cada problema concreto: diremos que se presenta la indeterminación 0/0.

Los casos en que una o ambas sucesiones divergen a infinito se hallan recogidos en la tabla contigua en la que aparecen asimismo las indeterminaciones $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, ∞/∞.

Es interesante señalar que

$$\lim (a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_m n^m) = \pm\infty$$

siendo el signo escogido el de a_m y que

$$\lim \frac{a_m n^m + \ldots + a_1 n + a_0}{b_p n^p + \ldots + b_1 n + b_0}$$

si $m = p$ es a_m/b_p, si $m < p$ es 0, y si $m > p$ es $\pm\infty$ con el signo de a_m/b_p.

Es frecuente abordar las indeterminaciones ∞/∞ dividiendo numerador y denominador por una misma expresión adecuada (véanse ejemplos de ello y de lo que sigue, al final del libro).

Una indeterminación 0/0 puede conducirse a ∞/∞ escribiendo

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(1/b_n)}{(1/a_n)};$$

la indeterminación $0 \cdot \infty$ pasa a ∞/∞ con

$$a_n \cdot b_n = \frac{b_n}{(1/a_n)}$$

y la del tipo $\infty - \infty$ pasa a $0 \cdot \infty$ poniendo

$$a_n - b_n = \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n}\right)(a_n \cdot b_n)$$

También es usual abordar esta última indeterminación mediante

$$a_n - b_n = \frac{an^2 - bn^2}{a_n + b_n}.$$

Utilizaremos también

$$\lim \left(a_n{}^{b_n}\right) = (\lim a_n)^{(\lim b_n)}$$

siempre y cuando existan tales límites y potencias (el significado de a^x cuando x es irracional puede verse en C2).

Esta regla se completa con los esquemas siguientes (y con $a^{-\infty} = 1/a^{+\infty}$)

$a =$	$+\infty$	$a > 1$	$0 < a < 1$	0^+	$-1 < a < 0$	$a < -1$
$a^{+\infty} =$	$+\infty$	$+\infty$	0_+	0^+	0	$\nexists$

$b =$	$+\infty$	$b > 0$	$b < 0$	$-\infty$
$+\infty^b =$	$+\infty$	$+\infty$	0^+	0^+

siendo indeterminaciones 1^∞, ∞^0 y 0^0.

Cuando $\lim a_n = 1$ y $\lim b_n = \pm\infty$, $\lim \left(a_n{}^{b_n}\right)$ presenta la indeterminación 1^∞.

Escribiendo $a_n = \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)$ tenemos

$$\lim (a_n)^{b_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{\frac{c_n b_n}{c_n}} = e^{\lim \frac{b_n}{c_n}},$$

ya que si $\lim c_n = \pm\infty$ entonces

$$\lim \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} = e.$$

Las indeterminaciones 0^0 e ∞^0 se tratan por métodos funcionales (E/7), útiles también para los casos expuestos.

Además, se tienen los siguientes criterios:

Stolz. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienen ambas límite 0, o ambas divergen a infinito, o lo hace $\{b_n\}$ crecientemente a partir de algún término, y existe

$$M = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \text{ entonces } \lim \frac{a_n}{b_n} = M.$$

Raíz. Si $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$ y $\lim \frac{a_n}{a_n - 1} = M \in \mathbf{R}$,

entonces $\lim \sqrt[n]{a_n} = M$.

Media aritmética. Si $\lim a_n = a$ se tiene

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a \ (a \in \mathbf{R})$$

Media geométrica. Si $a_n > 0 \ \forall \ n \in \mathbf{N}$ y es $\lim a_n = a \in \mathbf{R}$, entonces

$$\lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = a.$$

Stirling. Cuando n tiende a $+\infty$ puede reemplazarse $n!$ por $e^{-n} \cdot n^n \cdot \sqrt{2\pi n}$.

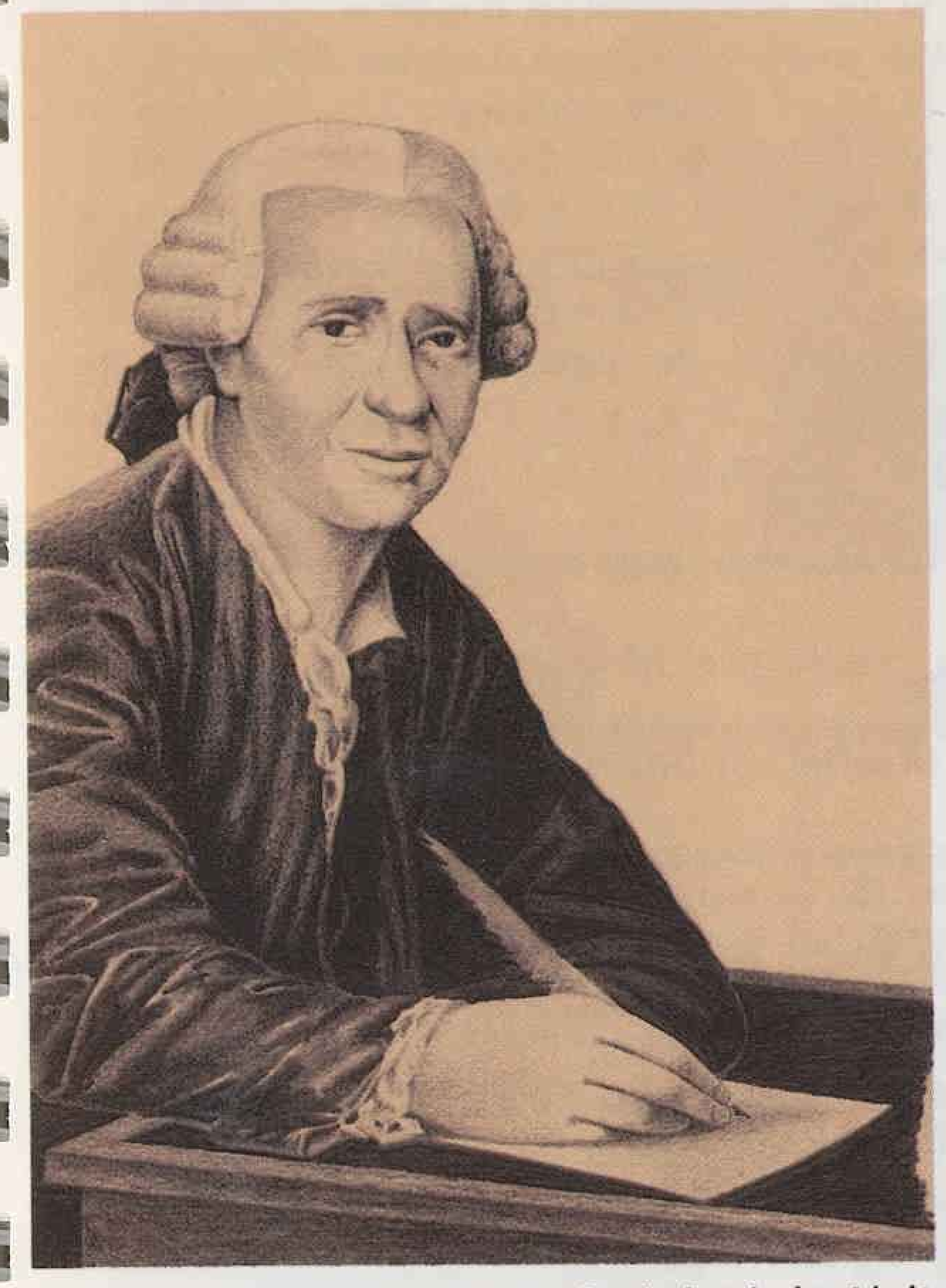


Fig. 1 – D'Alembert (1717-1783) redactó el artículo «Límite» de la Enciclopedia.

ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.
Mis en ordre & publié par M. DIDEROT, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse ; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, & de la Société Royale de Londres.
Tantum series juncturaque pollet,
Tantum de medio sumptis accedit honoris! HORAT.
TROISIÉME ÉDITION ENRICHIE DE PLUSIEURS NOTES
DÉDIÉE
À SON ALTESSE ROYALE
MONSEIGNEUR L'ARCHIDUC
PIERRE LÉOPOLD
PRINCE ROYAL DE HONGRIE ET DE BOHEME, ARCHIDUC D'AUTRICHE,
GRAND-DUC DE TOSCANE &c. &c. &c.
TOME PREMIER.
À LIVOURNE
DANS L'IMPRIMERIE DE LA SOCIÉTÉ
M. DCC. LXX.
AVEC APPROBATION.

Fig. 2 – Portada de la Enciclopedia Francesa.

$\lim a_n =$	$a > 0$	$a < 0$	0^+	0^-	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞
$\lim b_n =$	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	∞
$\lim(a_n + b_n) =$	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$+\infty$	$-\infty$	ind.	ind.	ind.	ind.
$\lim(a_n \cdot b_n) =$	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$-\infty$ $+\infty$ ∞	ind.	ind.	ind.	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞	∞	$+\infty$ $-\infty$ ∞
$\lim \frac{a_n}{b_n} =$	0^+ 0^- 0	0^- 0^+ 0	0^+ 0^- 0	0^- 0^+ 0	0	ind.	ind.	ind.	ind.	ind.	ind.
$\lim \frac{b_n}{a_n} =$	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$-\infty$ $+\infty$ ∞	$+\infty$ $-\infty$ ∞	$-\infty$ $+\infty$ ∞	∞	ind.	ind.	ind.	ind.	ind.	ind.

Indeterminación $0 \cdot \infty$ Indeterminación $\infty - \infty$ Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

SERIES DE NÚMEROS REALES

A partir de una sucesión $\{a_n\}$ formamos otra $\{s_n = a_1 + ... + a_n\}$ llamada *serie infinita* y denotada $\sum_{n\geq 1} a_n$ (o sencillamente, $\Sigma\ a_n$, si el índice n empieza valiendo 1). El *emésimo término de la serie* es a_m y s_n su *enésima suma parcial.* Si existe $s = \lim s_n$ se dice que la serie *converge,* siendo s su *suma,* y es *divergente* de no existir tal límite.

• Ejemplo.

La serie $(1/3) + (1/3^2) + (1/3^3) + ... = \Sigma\ (1/3^n)$ cumple $\lim s_n = \lim \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}$ por lo que converge con suma 1/2.

Este es un caso particular de las *series geométricas* $\Sigma\ ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^n$ que divergen para $r \geq 1$ y convergen con suma $(a/(1 - r))$ si $r < 1$.

La *serie armónica*

$$1 + (1/3) + (1/2) + ... = \Sigma(1/n)$$

es divergente. La serie *armónica generalizada*

$$(1/1^p) + (1/2^p) + (1/3^p) + ... = \Sigma(1/n^p)$$

es convergente si $p > 1$ y diverge si $p < 1$.

Si $\Sigma\ a_n = a$ y $\Sigma\ b_n = b$ entonces $\Sigma\ (a_n + b_n) = a + b$ y $\Sigma\ \alpha\ a_n = \alpha \cdot a$.

No afecta a la convergencia la supresión o adición de un número finito de términos.

Condición de Cauchy. $\Sigma\ a_n$ converge si y sólo si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu \in \mathbf{N}$ tal que si $n > \nu$, $p \in \mathbf{N}$ implica $|a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon$.

Como consecuencia, si $\Sigma\ a_n$ converge, será $\lim a_n = 0$ (la recíproca es falsa).

Se dice que $\Sigma\ a_n$ *es absolutamente convergente* cuando $\Sigma\ |a_n|$ converge. Si $\Sigma\ a_n$ converge, pero no absolutamente, se dice que su convergencia es *condicional.* La convergencia absoluta conlleva la convergencia, pero no al revés aunque sí para series de términos no negativos. Una serie obtenida reordenando una absolutamente convergente es también absolutamente convergente y tiene la misma suma, pero la reordenada de una condicionalmente convergente puede hacerse diverger o converger a cualquier número deseado.

Para series de términos positivos, se tiene:

1. La convergencia equivale a la acotación a la sucesión de sumas parciales.

2. (comparación). Si $a_n \leq b_n$ a partir de algún término.

a) Si $\Sigma\ b_n$ converge, $\Sigma\ a_n$ también;

b) Si $\Sigma\ a_n$ diverge, $\Sigma\ b_n$ también.

3. (cociente comparativo).

a) Si $\lim (a_n/b_n) = M$ ($\neq 0$ y de $+\infty$), ambas series convergen o ambas divergen.

b) Si $M = 0$ y $\Sigma\ b_n$ converge, $\Sigma\ a_n$ también.

c) Si $M = +\infty$ y $\Sigma\ b_n$ diverge, $\Sigma\ a_n$ también.

4. (Pringsheim). Si $p \in \mathbf{R}$ cumple $\lim n^p \cdot a_n = M$, $\Sigma\ a_n$ converge si $p > 1$ y M es finito, y $\Sigma\ a_n$ diverge si $p \leq 1$ y $M \neq 0$.

5. (Knopp o de condensación). Si $\{a_n\}$ es decreciente, $\Sigma\ a_n$ y $\Sigma\ 2^n \cdot a_n$ convergen o divergen ambas.

6. (D'Alembert o de la razón). Si $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = M$, $\Sigma\ a_n$ converge si $M < 1$ y diverge si $M > 1$.

7. (Raabe). Si $\lim n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = P$, $\Sigma\ a_n$ converge si $P > 1$ y diverge si $P > 1$.

8. (Cauchy o de la raíz). Si $\lim \sqrt[n]{a_n} = M$, $\Sigma\ a_n$ converge si $M < 1$ y diverge si $M > 1$.

Criterio de Dirichlet. Si $\Sigma\ a_n$ es una serie cualquiera cuya sucesión de sumas parciales está acotada, y $\{b_n\}$ es decreciente de límite 0, $\Sigma a_n \cdot b_n$ converge.

Criterio de Abel. Si $\Sigma\ a_n$ converge y $\{b_n\}$ es monótona acotada, $\Sigma\ a_n\, b_n$ converge.

Una serie en que los términos son alternativamente uno positivo, uno negativo, es denominada *serie alternada.* Si $\Sigma\ a_n$ es alternada, con $\{|a_n|\}$ decreciente y $\lim a_n = 0$, entonces $\Sigma\ a_n$ converge (y además la enésima suma parcial difiere de la suma total en menos de $|a_{n+1}|$).

• Ejemplos.

$\Sigma\ [1/(n^2 + 3n + 11)]$ converge por comparación con armónica generalizada, pues

$$[1/(n^2 + 3n + 11)] < (1/n^2).$$

$\Sigma\ [(4n^2 + 5n - 2)/\sqrt{(n^2 + 1)^3 n^2}]$ converge, pues usando Pringsheim,

$$\lim n^2 \cdot [(4n^2 + 5n - 2)/\sqrt{(n^2 + 1)^3 n^2}] = 4$$

$\Sigma n^5 \cdot e^{-n^3}$ converge, pues, con el criterio de la razón,

$$\lim [(n + 1)^5\, e^{-(n+1)^3}/(n^5\, e^{-n^3})] = \lim [(n + 1)/n]^5 \cdot e^{n^3 - (n+1)^3} = 1 \cdot 0 = 0$$

. . . .

$\Sigma[n/(4n - 1)]^{\frac{n^2}{2n-1}}$ converge, pues el criterio de la raíz hallamos que $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1/2$.

La serie alternada siguiente converge:

$$(1/3) - (1/5) + ... + [(-1)^{n+1}/(1 + 2^n)] + ...$$

pues $\{1/(1 + 2^n)\}$ es decreciente de límite 0.

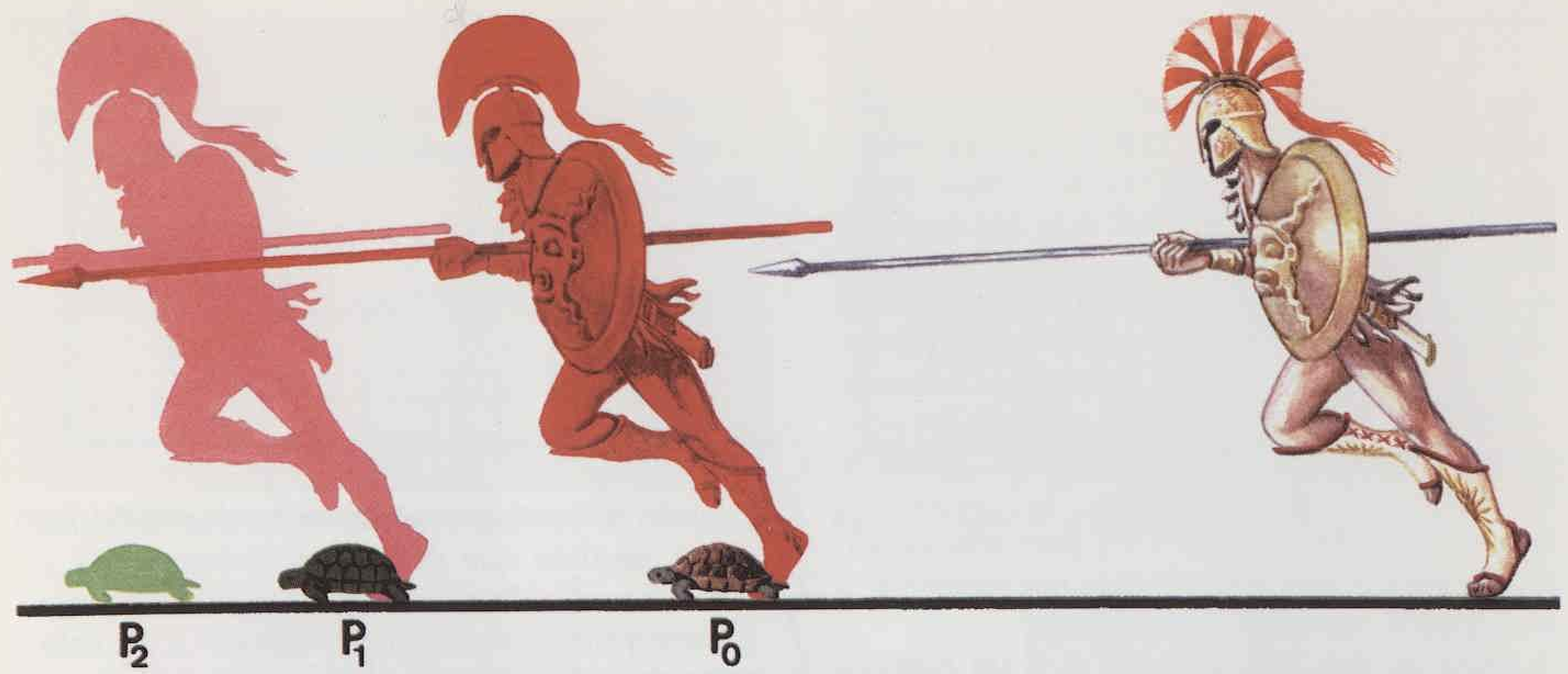


Fig. 1 – Si la tortuga empieza la carrera con cierta ventaja sobre Aquiles, cuando éste alcance su posición inicial P_0, la tortuga se habrá desplazado a la posición P_1, por cercana que sea. Cuando Aquiles llegue a P_1, la tortuga ya estará en P_2, y así sucesivamente, por lo que parece que Aquiles jamás dará alcance a la tortuga. Sin embargo, si suponemos que Aquiles corre diez veces más deprisa que la tortuga y que tarda un segundo en llegar a P_0, necesitaría una décima para llegar a P_1, una centésima para llegar a P_2..., pero

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + ... = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^n} = 1 + \frac{1}{9}$$

por lo que en 1 seg y 1/9 de seg la alacanzará. En un seg y dos décimas la habrá rebasado. La intuición fracasa al parecer que una suma de infinitos términos positivos ha de dar necesariamente infinito.

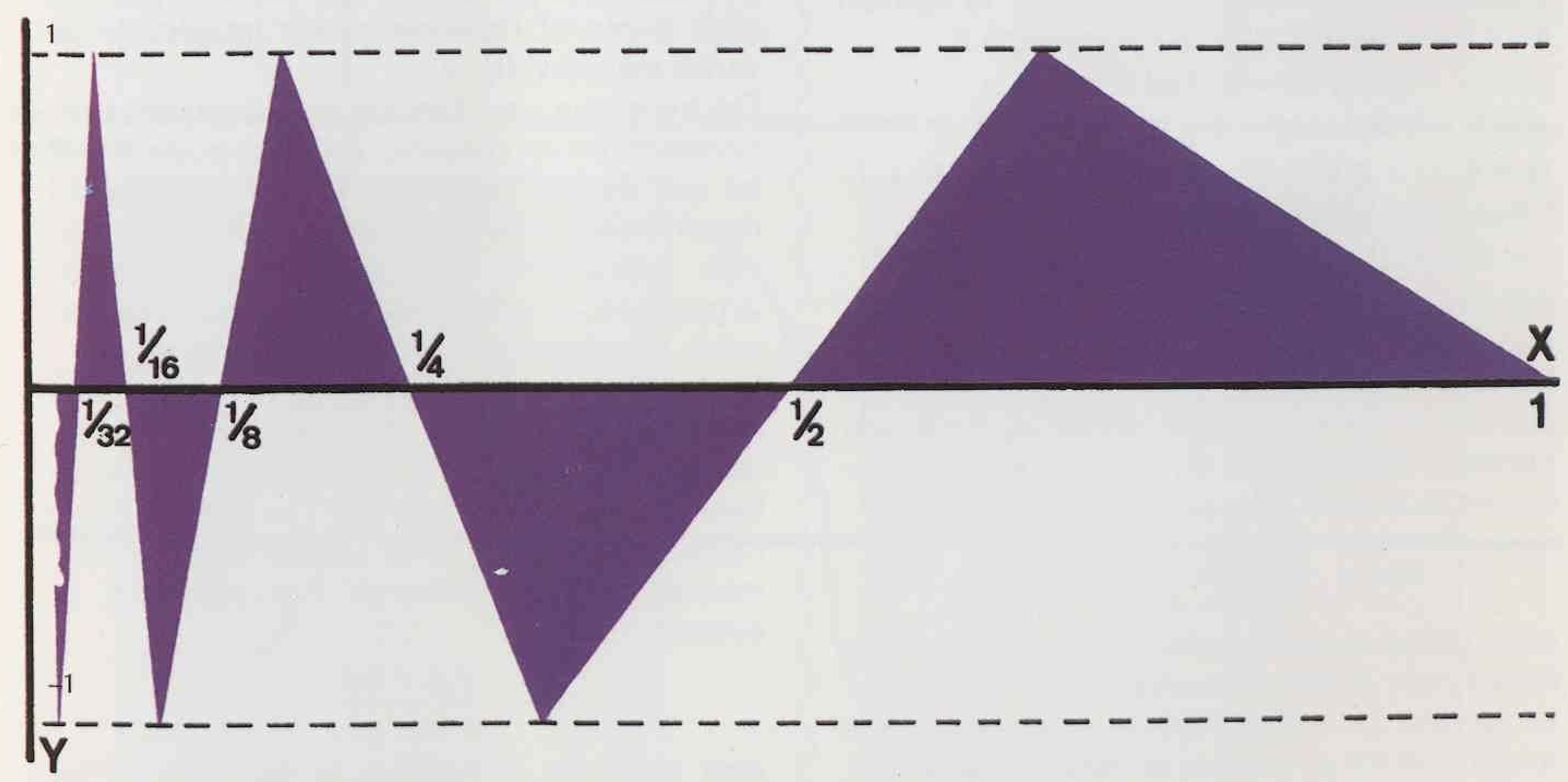


Fig. 2 – El área de la región coloreada, suma de las infinitas áreas triangulares, es:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) \cdot 1}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Funciones reales de variable real

Una *función real de variable real* es una aplicación $f: A \to \mathbf{R}$ donde $A \subset \mathbf{R}$ es llamado *dominio* de la función y $f(A)$ su *recorrido*. Suele escribirse $y = f(x)$, diciéndose que x es la *variable independiente* e y la *variable dependiente*. Es decir, se pondrá $y = 3x + 2$ para referirse a la función f definida por $f(x) = 3x + 2$. Cuando se hace así, se supone que el dominio se extiende a todos los x para los que son posibles las operaciones indicadas. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = 3x + 2$ es $\mathbf{R}$; sin embargo, la función $y = (1/\sqrt{x})$ tiene dominio $(0, +\infty)$, pues sólo tienen raíz cuadrada real los números no negativos, y 0 no puede aparecer como divisor.

A partir de dos funciones f y g, y un número real k, se definen las funciones.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ (kf)(x) = k \cdot f(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

llamadas, respectivamente, suma de f y g, producto de f por el número k, producto de f y g, y función compuesta de f con g. Sus dominios se tomarán lo más amplios que sea posible en cada caso.

Merece especial atención la función compuesta $g \circ f$. Si f asocia a x un número y, $y = f(x)$, y g asocia a y un número z, $z = g(y)$, la función $g \circ f$ hace correponder a x el número z

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

Si $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2x + 3$,

$$(g \circ f)(x) = g(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 3 = 2x^2 + 1.$$

Obsérvese que $(f \circ g)(x) =$

$$= f(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 1 = 4x^2 + 12x + 8,$$

por lo que sucede $f \circ g \neq g \circ f$, salvo en casos muy particulares.

Las funciones más sencillas son las polinómicas $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, donde $a_0, \ldots, a_n$ son números reales), cuyo dominio es $\mathbf{R}$, y las funciones racionales, que se expresan

$$h(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n},$$

cuyo dominio excluye los números reales que hacen nulo el denominador.

La función $\mathbf{I}(x) = x$ que asocia cada número a sí mismo, recibe el nombre de función identidad. Si $f \circ g = g \circ f = \mathbf{I}$, se dice que g es la función inversa de f (y al revés), escribiéndose $g = f^{-1}$. En definitiva, si $f(a) = b$, es $f^{-1}(b) = a$. Para la existencia de tal f^{-1} está claro que no pueden existir elementos a_1, a_2 con $a_1 \neq a_2$, tales que $f(a_1) = b = f(a_2)$, pues entonces no podría hacerse simultáneamente $f^{-1}(b) = a_1$ y $f^{-1}(b) = a_2$.

No debe confundirse la función inversa f^{-1} con la funcion $(1/f)$, a menudo llamada *recíproca* de f. Por ejemplo, si

$$f(x) = 7x + 3, \text{ es } f^{-1}(x) = (x - 3)/7$$

$$\text{pues } (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(7x + 3) = \frac{(7x + 3) - 3}{7} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{x - 3}{7}\right) = 7\frac{x - 3}{7} + 3 = x$$

en cambio $(1/f)(x) = 1/(7x + 3)$

Cuando se tiene una ecuación en dos variables x e y, se dice que define *implícitamente* a y como función de x, cuando se puede despejar y correspondiendo a cada valor de x un solo valor de y que cumpla la igualdad; por ejemplo, $x^2 - 3xy + 7 = 0$ define implícitamente la función $y = (x^2 + 7)/3x$ obtenida despejando y de la ecuación anterior.

Tomando ejes cartesianos sobre el plano, el conjunto de puntos $(x, f(x))$ se llama *gráfica* de la función f. La visualización de la gráfica poporciona una información rápida sobre el comportamiento de f, por lo que es importante su construcción y estudio. Para n valores de la variable $x_1, \ldots, x_n$ obtenemos n puntos de la gráfica $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, que nos orientarán sobre la posición de la figura (fig. 1), pero está claro que por grande que sea n, el paso de cada punto al siguiente puede imaginarse de varias maneras (fig. 2).

Decimos que una función está *acotada superiormente* en un conjunto $A \subset \mathbf{R}$ si existe $K \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) \leq K$ para todo x de A que sea del domino de f. Análogamente se define la acotación inferior. Se dice sencillamente *función acotada* para expresar que lo está en ambos sentidos. Usualmente A será un intervalo (fig. 3).

Se dice que f es *creciente* en $[a, b]$ cuando para todos los x, y que sean del intervalo y del dominio, con $x < y$, se tiene $f(x) \leq f(y)$. Si además se tiene $f(x) < f(y)$, se dice que f es *estrictamente creciente*. Análogamente se define el decrecimiento. Formulísticamente, f crece en $[a, b]$ cuando

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

para todos los x, y de $[a, b]$ del dominio (se pondría ≤ 0 para el decrecimiento)

- **Ejemplo** $f(x) = (x - 1)^2$ decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$, pues

$$\frac{(x - 1)^2 - (y - 1)^2}{x - y} = \frac{(x - y)(x + y - 2)}{(x - y)} = x + y - 2$$

que es positivo en $(1, +\infty)$ y negativo en $(-\infty, 1)$

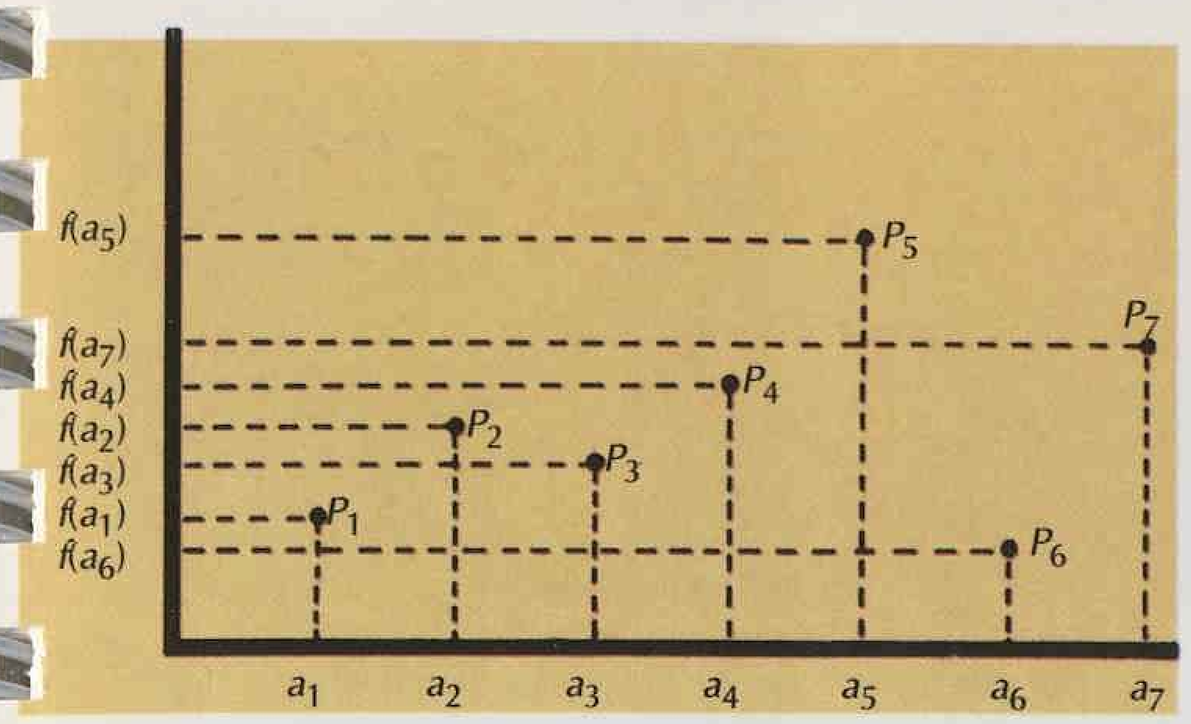


Fig. 1 – Puntos para el trazado de una gráfica.

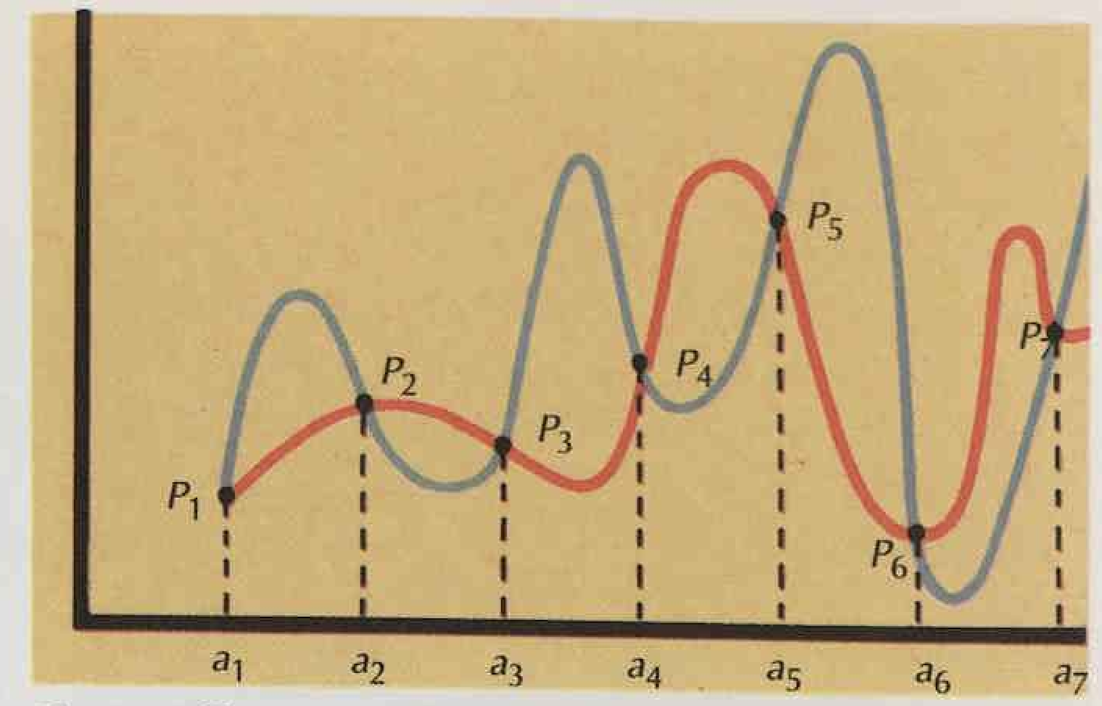


Fig. 2 – Diferentes gráficas por los puntos anteriores.

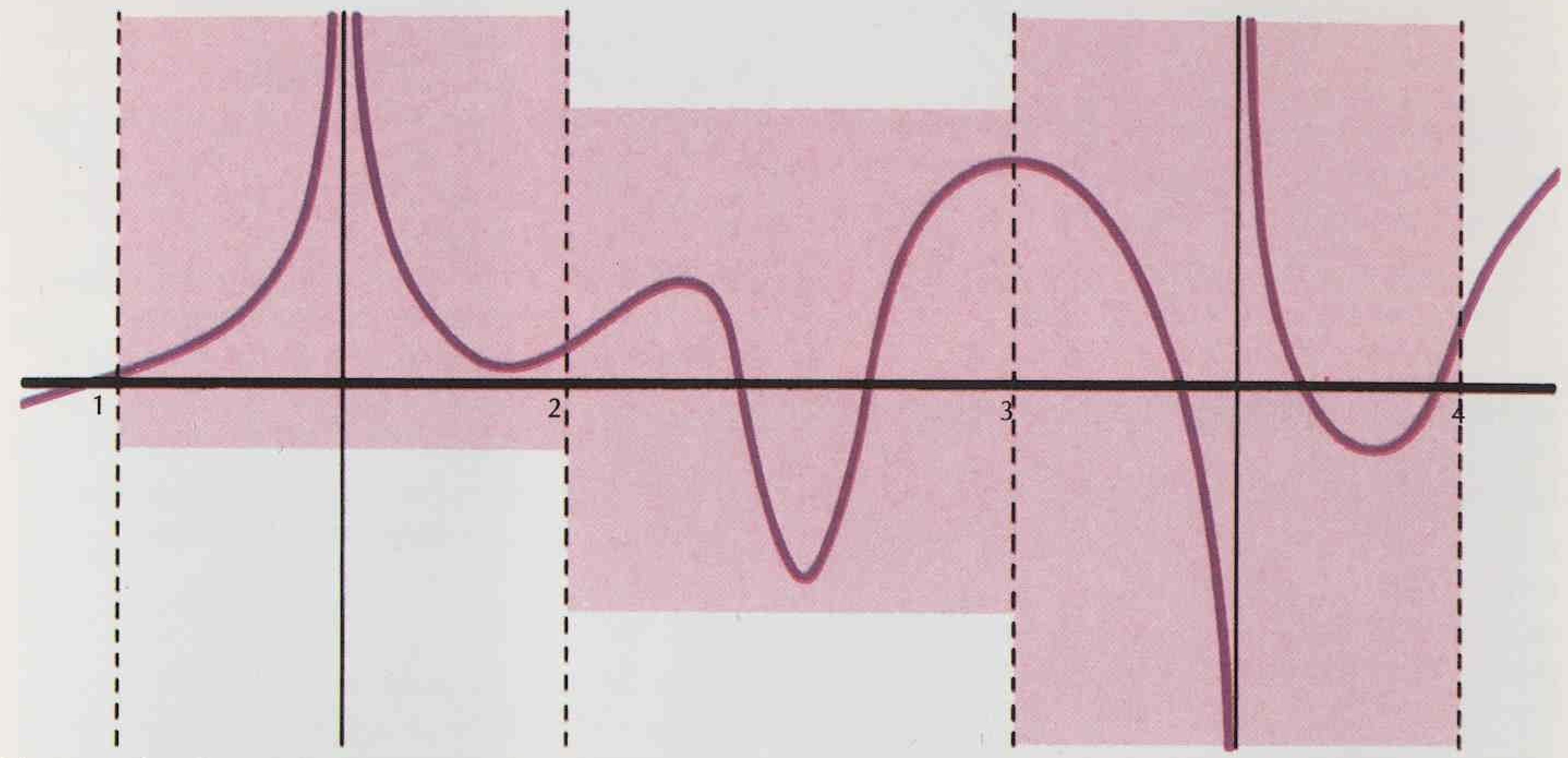


Fig. 3 – La función estaría acotada en el intervalo [2, 3], sólo inferiormente en el intervalo [1, 2] y en ningún sentido en el intervalo [3, 4].

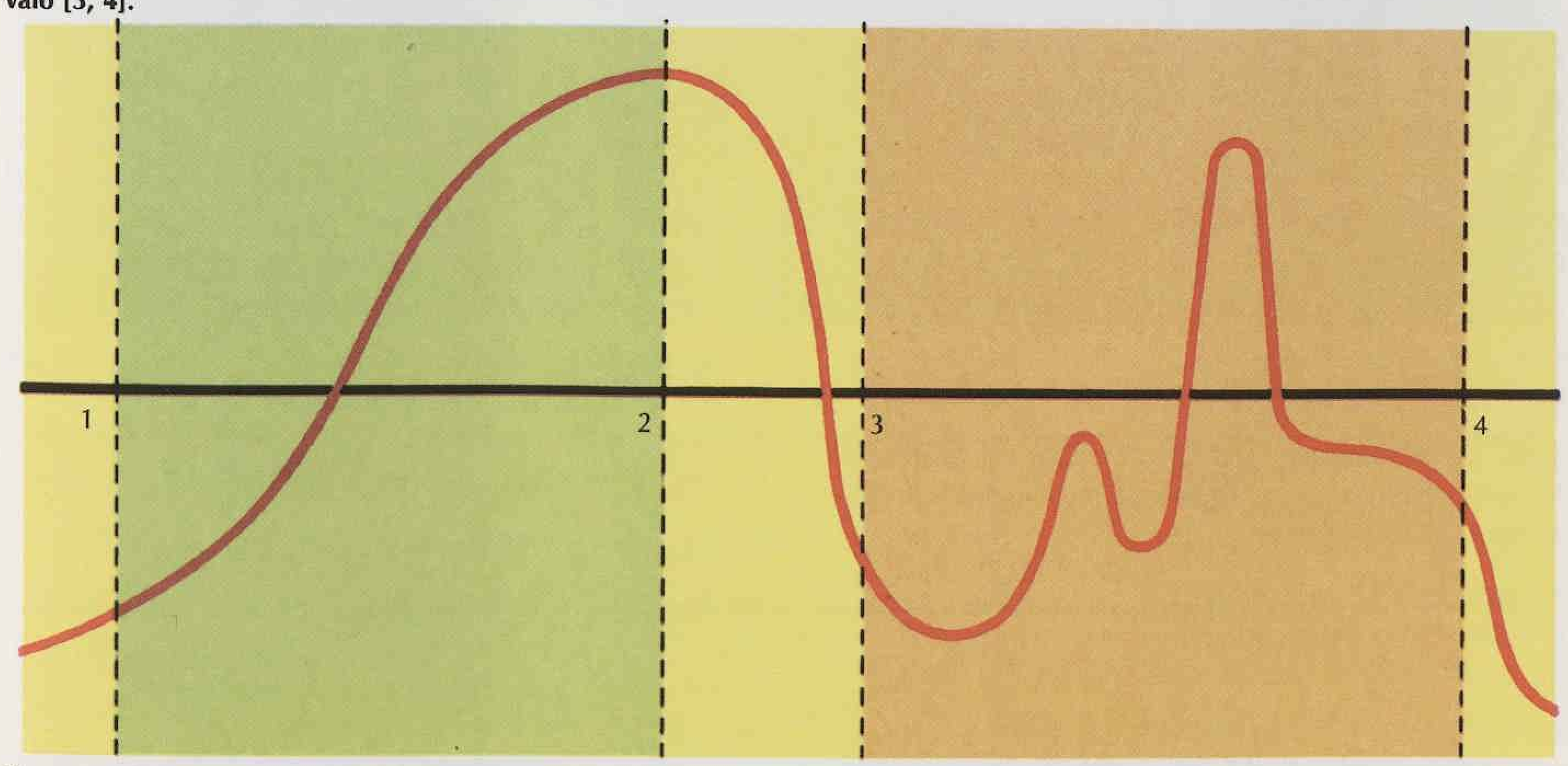


Fig. 4 – La función crece en [1, 2] y decrece en [2, 3]. En [3, 4] no puede llamársela creciente, ni tampoco decreciente.

FUNCIONES CIRCULARES

Si x es un número real positivo, construyamos el punto P_x de la circunferencia de centro $0 = (0,0)$ y radio 1, situado a distancia x del punto $P = (1,0)$ medida a lo largo de la circunferencia en sentido contrario al de avance de las agujas de un reloj (al revés si $x < 0$). Las razones trigonométricas del ángulo definido por las semirrectas OP, OP_x serán las *funciones circulares* del número x. Explícitamente: coseno de x = cos x = abscisa de P_x, seno de x = sen x = ordenada de P_x. Como $P_x = P_{x+2\pi n}$ $\forall n \in \mathbf{Z}$, decimos que tales funciones son *periódicas*, con *período* 2π.

A partir de estas funciones definimos
tangente de x = tg x = (sen x)/(cos x)
cotangente de x = cotg x = 1/tg x
cosecante de x = cosec x = 1/sen x
secante de x = sec x = 1/cos x
Las razones de uso más frecuente son:

$$\text{sen } 0 = 0,\ \cos 0 = 1,\ \text{tg } 0 = 0,$$
$$\text{sen }(2/\pi) = 1,\ \cos(\pi/2) = 0,\ \text{tg }(\pi/2) = \propto,$$
$$\text{sen } \pi = 0,\ \cos \pi = -1,\ \text{tg } \pi = 0,$$

y las de $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/6$ (véanse problemas del final).
Las propiedades más usadas son:

$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1,$
$\text{sen }(-x) = -\text{sen } x,\ \cos(-x) = \cos x,$
$\text{sen }(x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{ sen } y,$
$\text{sen }(x - y) = \text{sen } x \cos y - \cos x \text{ sen } y,$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \text{sen } x \text{ sen } y,$

$$\text{tg }(x + y) = \frac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 - \text{tg}x\,\text{tg}y},\ \text{tg }(x - y) = \frac{\text{tg}x - \text{tg}y}{1 + \text{tg}x\text{tg}y}$$

Puede visualizarse en las gráficas contiguas el comportamiento de estas funciones, en cuanto a acotación, crecimiento y dominio.
Como hay infinitos números reales con las mismas razones trigonométricas, se consideran las restricciones

sen: $[-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1,1]$
cos: $[0, \pi] \rightarrow [-1,1]$
tg: $[-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbf{R}$

que, definidas entre tales conjuntos, admiten inversas llamadas *arcoseno, arcocoseno* y *arcotangente,* respectivamente:

arcsen: $[-1,1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$
arccos: $[1\ -1,1] \rightarrow [0, \pi]$
arctg: $\mathbf{R} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

con arcsen $x = y$ equivaliendo a sen $y = x$ (pero $-1 \le x \le 1$, $-(\pi/2) \le y \le (\pi/2)$, etc. Las funciones inversas de cotg, sec y cosec son muy raramente empleadas.

FUNCIÓN EXPONENCIAL. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea a un número real positivo diferente de 1.
Si $n \in \mathbf{N}$ $a^n = a \cdot a \cdot \overset{n}{..} \cdot a$, $a^0 = 1$, $a^{-n} = (1/a^n)$,
si $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
con lo que hemos llegado hasta los exponentes racionales. Ahora si $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, será un decimal no finito ni periódico $x = E'd_1 d_2 \ldots d_n \ldots$, límite de la sucesión $\{E'\ d_1\ d_2 \ldots d_n\}$. Se define

$$a^x = a^{\lim E'\ d_1\ d_2 \ldots d_n} = \lim a^{E'\ d_1 \ldots d_n}$$

Las propiedades de la *función exponencial de base a,* $f(x) = a^x$, son:

I. $a^x > 0 \quad x \in \mathbf{R}.$
II. $a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$
III. $(a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$
IV. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \quad \forall x \in \mathbf{R}.$
V. $a^{-x} = (1/a^x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$
VI. $a^{-x} = 1$ si y sólo si $h = 0$
VII. Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$
VIII. Si $0 < a < 1$, $f(x)$ es estrictamente decreciente, y si $a > 1$, $f(x)$ es estrictamente creciente.
IX. Si $a > b > 0$ entonces $a^s > b^s$ $\forall s \in \mathbf{R}^+$ y $a^t < b^t$ $\forall t \in \mathbf{R}^-$.
X. $\forall z \in \mathbf{R}^+$ existe x tal que $a^x = z$.

Se llaman funciones hiperbólicas sh x = *seno hiperbólico* de x y ch x = *coseno hiperbólico* de x a

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(veánse también las gráficas en F/15)
La función $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ que a x le asigna el y tal que $a^y = x$, inversa de la exponencial de base a, recibe el nombre de *función logarítmica de base a*. Es decir, $y = \log_a x$ equivale $a^x = y$.
Así, $a^{\log_a x} = x \in \mathbf{R}^+$, $\log_a(a^x) = x \quad x \in \mathbf{R}$.

Se pone ln x o *Lx* o *lx* en vez de $\log_e x$, para designar a la función logarítmica de base e, también llamada *logaritmo neperiano,* y para el logaritmo de base 10, o *decimal* log x en vez de $\log_{10} x$.
Las principales propiedades son:

I. $\log_a x = \log_a y$ implica $x = y$
II. $\forall y \in \mathbf{R}$ existe $x \in \mathbf{R}^+$ tal que $\log_a x = y$
III. $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$.
IV. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^+.$
V. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^+.$
VI. $\log_b M = (\log_a M)/(\log_a b)$
VII. Si $a > 1$, $\log_a$ es estrictamente creciente, y si $0 < a < 1$, $\log_a$ decrece estrictamente.
VIII. Si $1 < a < b$ o bien $0 < a < b < 1$
$\log_a x > \log_b x$ $(x > 1)$; $\log_a x < \log_b x$ $(x < 1)$
IX. Si $0 < a < 1 < b$, para $0 < x < 1$ es
$\log_a x > \log_b x$, y si $x < 1$ $\log_a x < \log_b x$.

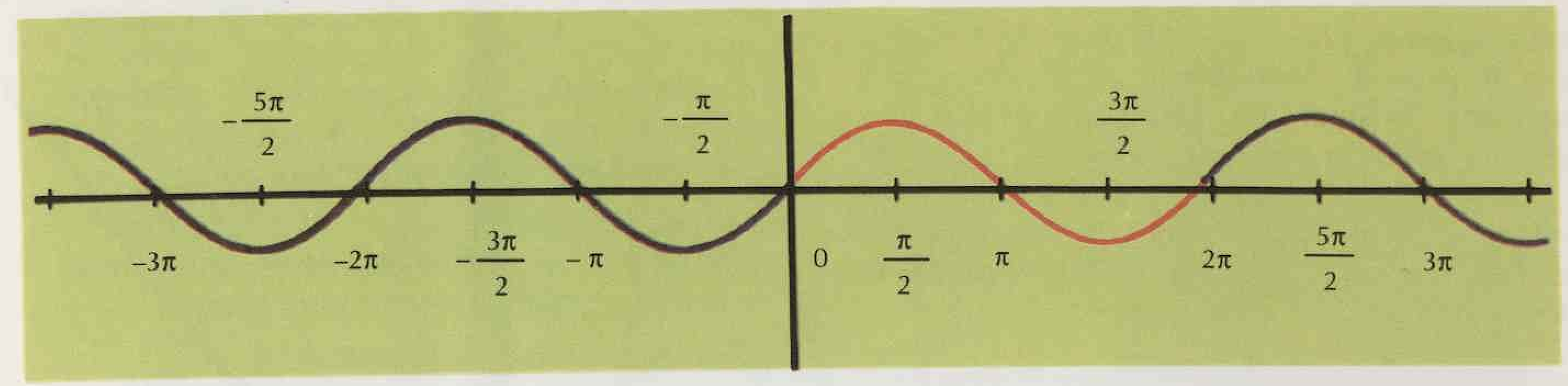


Fig. 1 – y = sen$x$

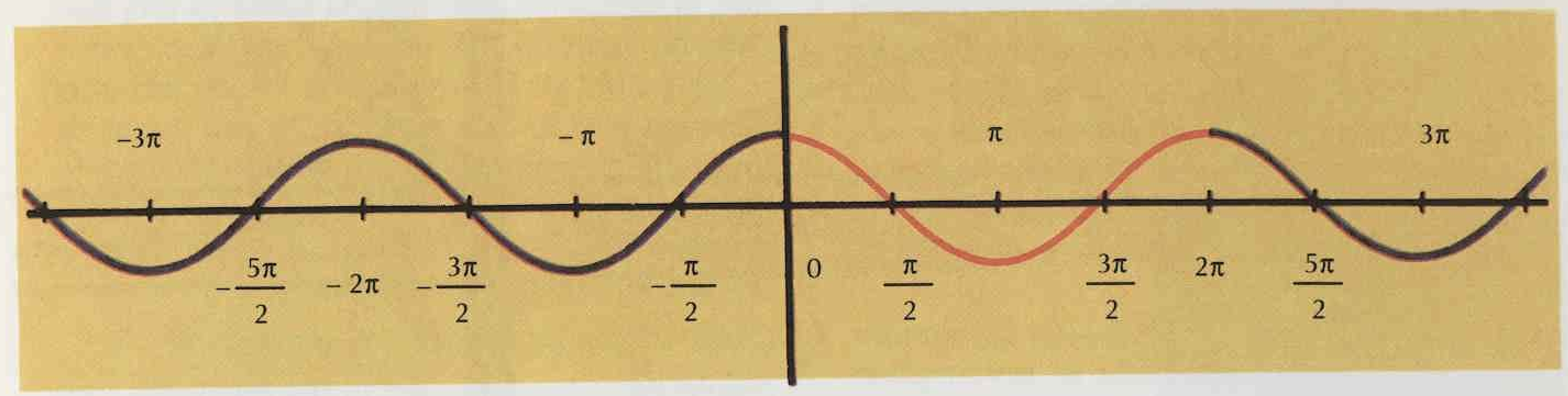


Fig. 2 – y = cos$x$

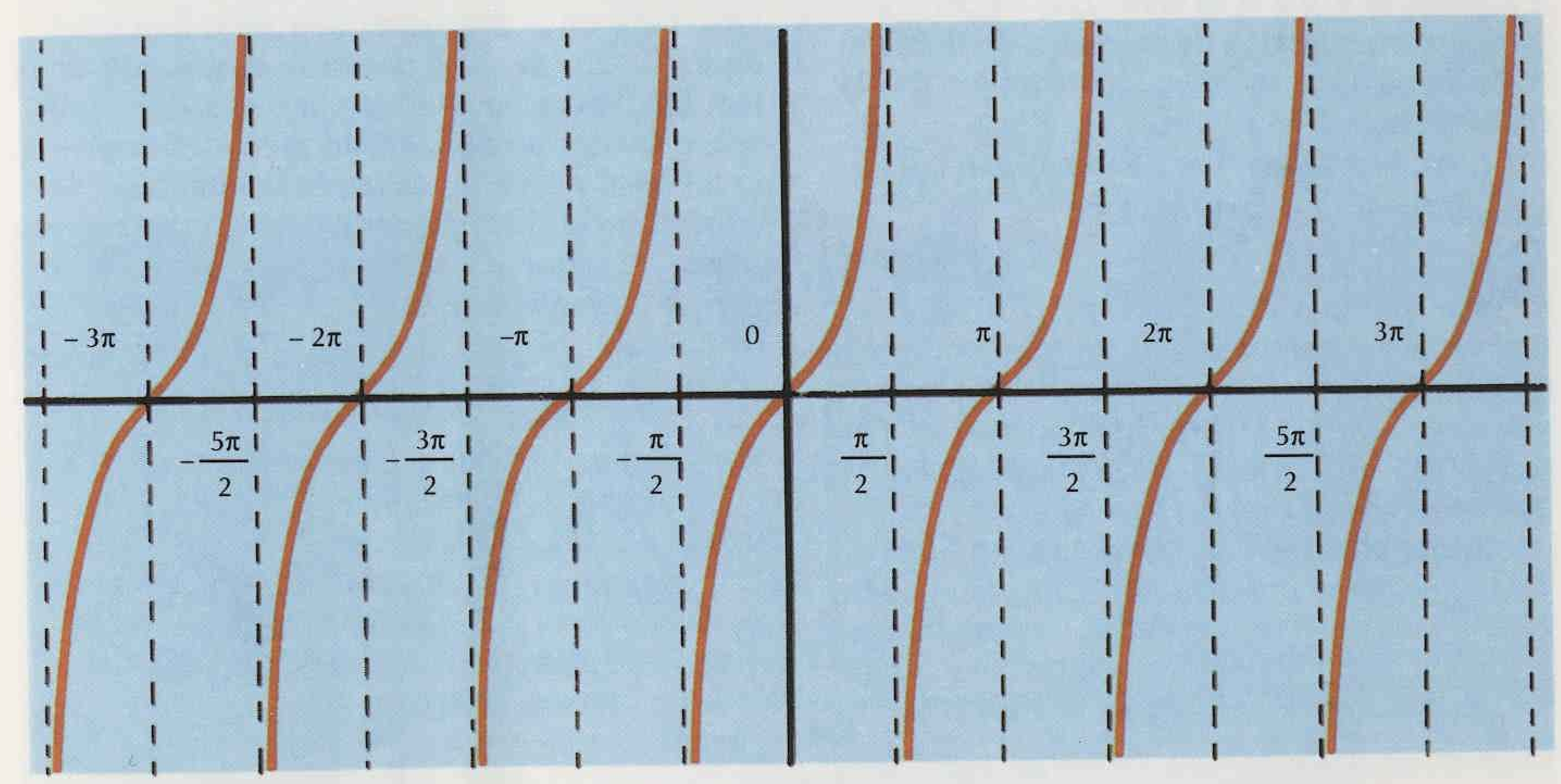


Fig. 3 – y = tg$x$

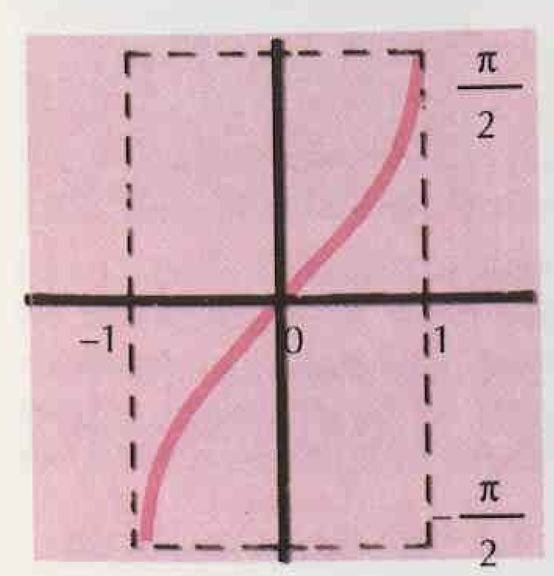


Fig. 4 – y = arc. sen x

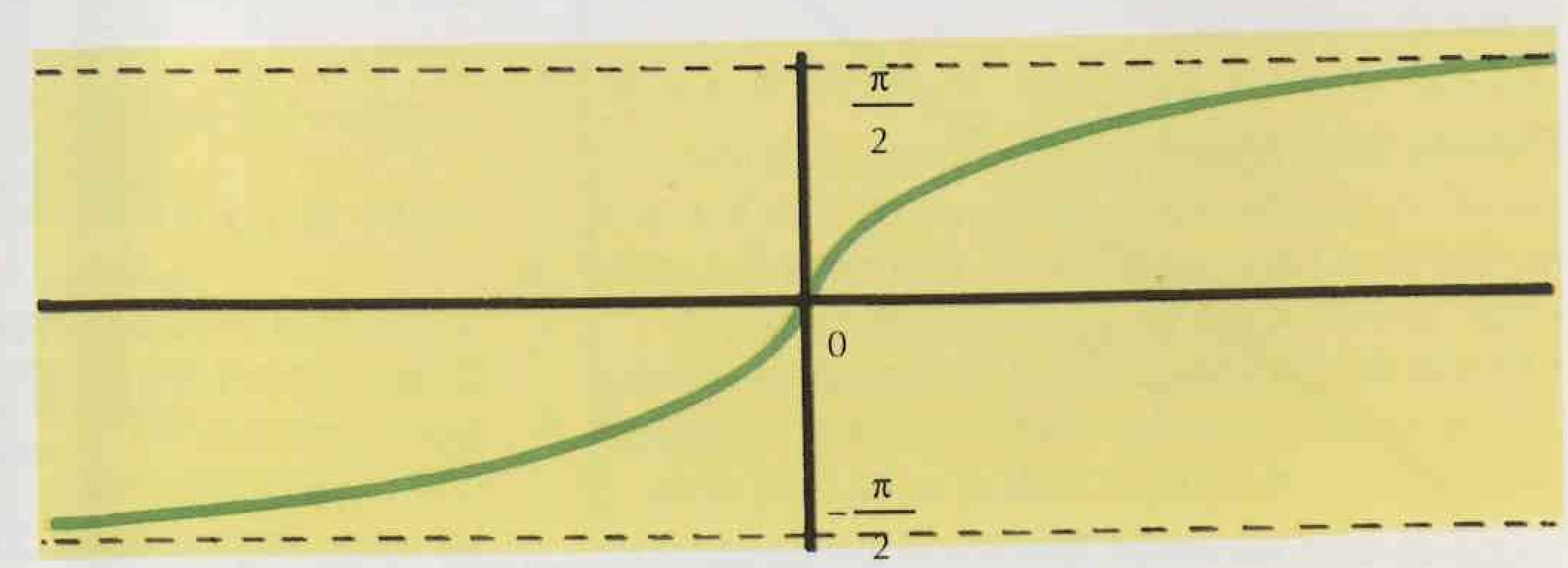


Fig. 5 – y = arc. tg x

SUCESIONES Y SERIES FUNCIONALES

Supongamos que para cada $n \in \mathbf{N}$ tenemos una función f_n de dominio A, es decir, una *sucesión* de funciones. Para cada x de A tendremos una sucesión de números $\{f_n(x)\}$. Al conjunto de $x \in A$ para los cuales $\{f_n(x)\}$ converge, se le llama *dominio de convergencia puntual* de $\{f_n\}$. Si x es uno de tales puntos, se define una función f mediante

$$f(x) = \lim f_n(x)$$

diciéndose que $\{f_n\}$ tiende a f, o que f es la *función límite* de $\{f_n\}$, escribiéndose $f_n \to f$ o bien $\lim f_n = f$. Según vimos (B1) ello significa que $\forall \varepsilon > 0$ existe $\upsilon \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq \upsilon$ es $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, donde υ dependerá, en principio de ε y de x. Si sólo depende de ε, se dice que $\{f_n\}$ converge *uniformemente* hacia f. La convergencia uniforme conlleva la puntual, pero no recíprocamente.

Condición de Cauchy. Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones converge uniformemente en un conjunto A si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\upsilon \in \mathbf{N}$ tal que si $p, q \geq \upsilon$ entonces $\forall x \in A$ se tiene $|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$.

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones de dominio A, se llama *serie funcional* de términos f_n a la sucesión $\{s_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n\}$

Las s_n reciben el nombre de *sumas parciales*.

La serie se denota $\sum_{n \geq 1} f_n$ o Σf_n.

Se dice que una serie funcional Σf_n es *puntualmente convergente* si lo es la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales, cuyo límite se llama entonces *suma de la serie;* el dominio don le ello ocurre se llama *dominio de convergenc a puntual* de la serie. Si la sucesión de suma: parciales es uniformemente convergente, se dirá que Σf_n *converge uniformemente.* Cuando converge $\Sigma |f_n(x)|$ se dice que $\Sigma f_n(x)$ *converge absolutamente,* y donde ello sucede recibe el nombre de *dominio de convergencia absoluta.*

Criterio de Cauchy. Σf_n converge uniformemente si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\upsilon \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq \upsilon$, entonces

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{A}.$$

Criterio de Weierstrass. Si puede hallarse una sucesión $\{a_n\}$ de reales positivos tal que $\forall x \in \mathbf{A}$ es $f_n(x) \leq a_n$ para cada $n \in \mathbf{N}$, entonces Σf_n converge uniformemente y absolutamente en A.

Criterio de Dirichlet. Si Σf_n es una serie funcional de sumas parciales uniformemente acotadas

$$|f_1(x) + \ldots + f_n(x)| < M \; \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{A},$$

y $\{g_n\}$ es una sucesión funcional de límite 0 tal que $g_n(x) \geq g_{n+1}(x) \; \forall x \in \mathbf{A}, \forall n \in \mathbf{N}$, entonces $\sum_{n \geq 1} f_n(x) \cdot g_n(x)$ converge uniformemente en A.

Criterio de Abel. Si Σf_n converge uniformemente en A y $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones crecientes (o todas decrecientes), *uniformemente acotadas* en A, o sea, $\exists M > 0$ tal que $|g_n(x)| < M$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in \mathbf{A}$, entonces $\Sigma f_n(x) g_n(x)$ convergente uniformemente en A.

Merecen especial mención las *series trigonométricas* y las *de potencias.* Las trigonométricas (o de Fourier) tienen por término general

$$f_n(x) = a_n \cos(\pi n x/p) + b_n \operatorname{sen}(\pi n x/p),$$

donde a_n y b_n son números reales. Obsérvese que, si esta serie converge, la suma es una función de período $2p$, es decir, tal que $f_n(x) = f(x + 2p)$. En F15 damos la condición para que una función de período $2p$ sea suma de una serie trigonométrica. En sentido inverso, se tiene:

Proposición. Si Σa_n y Σb_n son series numéricas absolutamente convergentes

$$(a_0/2) + \Sigma[a_n \cos(\pi n x/p) + b_n \operatorname{sen}(\pi n x/p)]$$

converge absoluta y uniformemente en todo **R.**

Una *serie de potencias* es una serie funcional de forma $\Sigma a_n(x - a)^n$ donde $n \in \mathbf{N}$ y a es un real fijo. Existe un intervalo $(a - r, a + r)$ en el que converge absolutamente, siendo divergente si $|x - a| > r$. En los extremos del intervalo, la convergencia o no depende de cada caso particular. El número r se llama *radio de convergencia* (eventualmente 0 o $+\infty$), se halla mediante

$$r = 1/\lim \sqrt[n]{a_n}\,, \; r = \lim |a_n/a_{n+1}|.$$

Proposición. Una serie de potencias converge uniformemente en todo intervalo cerrado contenido en el dominio de convergencia.

Una funcion f es *desarrollable en serie de potencias de* $(x - a)$ si es $f(x) = \Sigma a_n(x - a)^n$ para todo x de campo de convergencia de cierta serie de potencias (véase también F/15). Por ejemplo, para $-\infty < x < +\infty$

$$\operatorname{sen} x = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

y para $-1 < x < 1$

$$\ln |1 + x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$$

• **Ejemplo** (*veáse también* F/15)

$\Sigma[(\operatorname{sen} nx)/n^5]$ converge uniformemente en **R**, pues $[(\operatorname{sen} nx)/n^5] \leq [1/n^5]$ y $\Sigma[1/n^5]$ converge (Criterio de Weierstrass)

La serie de potencias $\Sigma n^{-2} \cdot 3^{-n} x^n$ tiene radio de convergencia 3, pues $\lim |(x + 1)^2 \, 3^{-n-1} \, x^{n+1} : n^{-2} \, 3^{-n} x^n| = |x|/3$ (además converge también si $x \pm 3$).

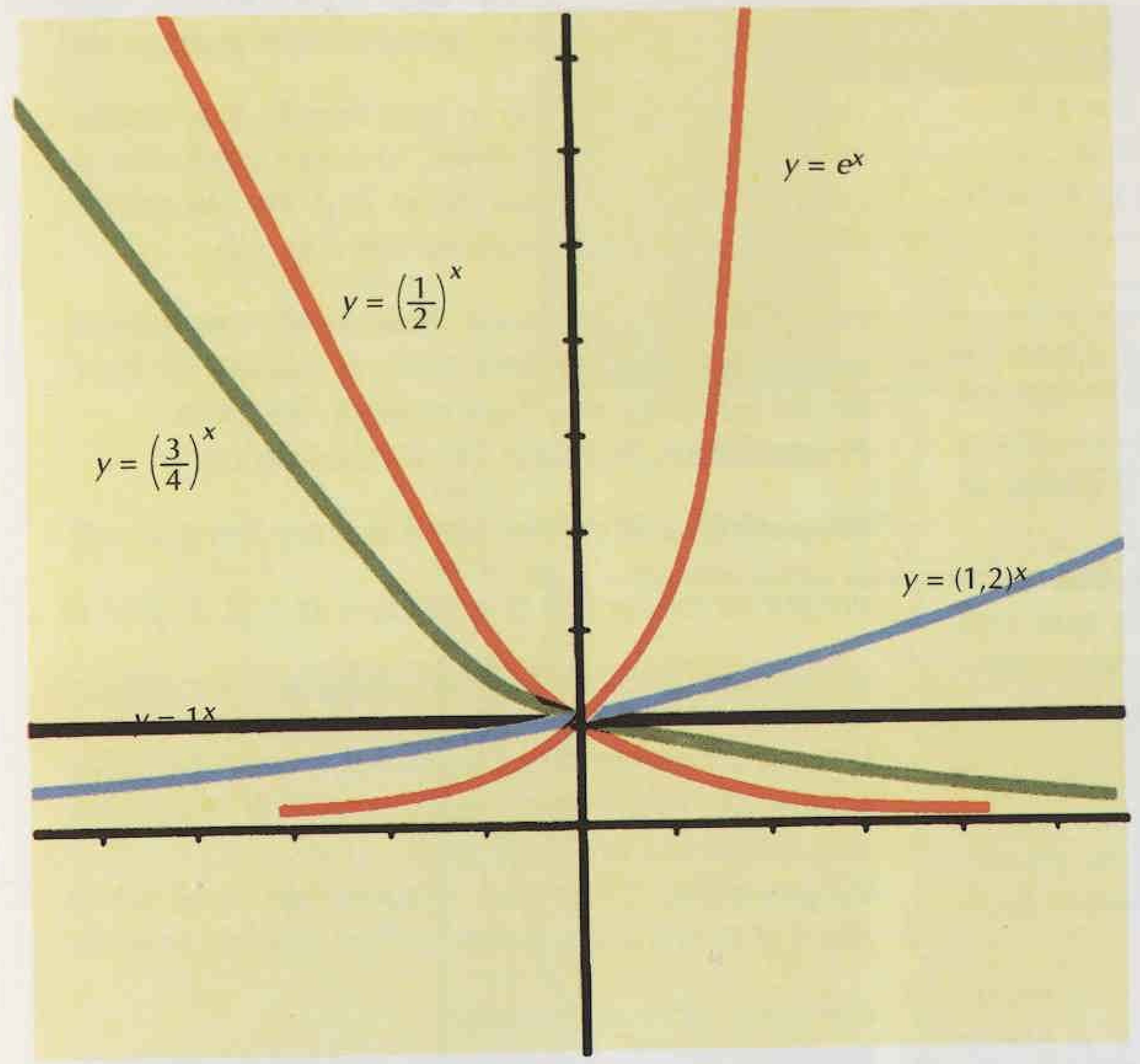


Fig. 1 – Funciones exponenciales.

Fig. 2 – Joan Neper (1550-1617), introductor del cálculo logarítmico.

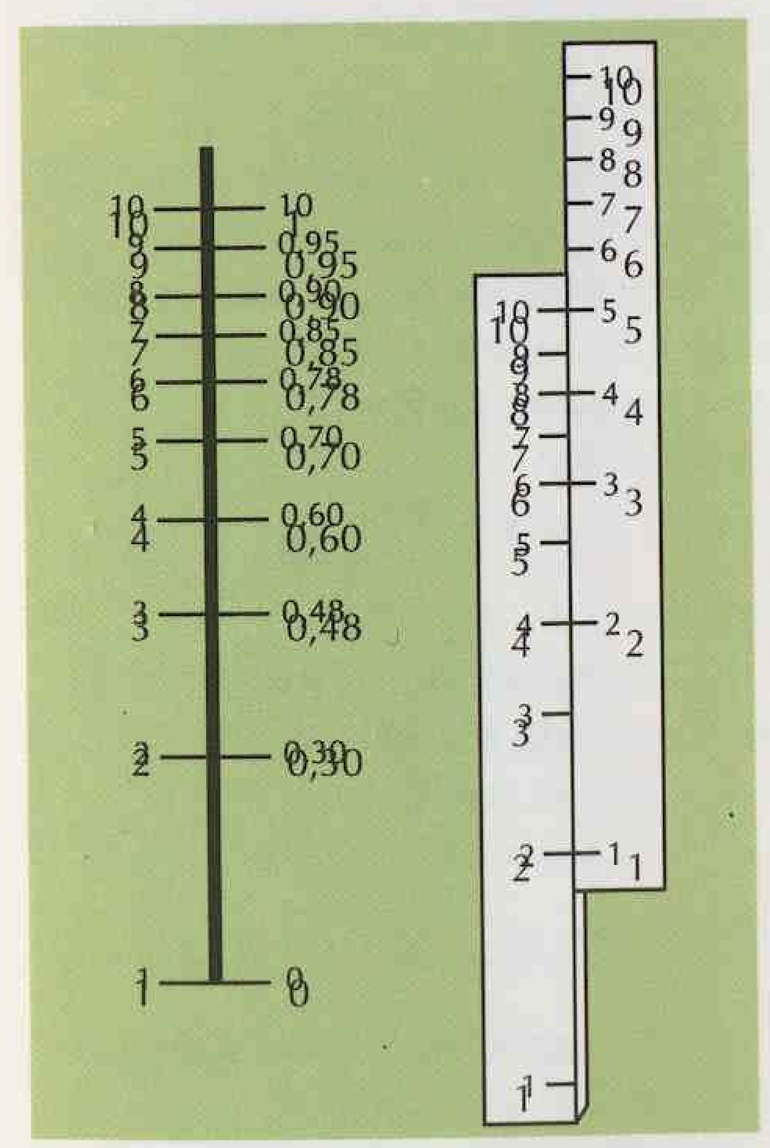


Fig. 3 – En la regla de cálculo de Oughtreed, las multiplicaciones y divisiones se hacen añadiendo o sustrayendo segmentos de dos escalas deslizantes en las que las distancias son proporcionales a los logaritmos.

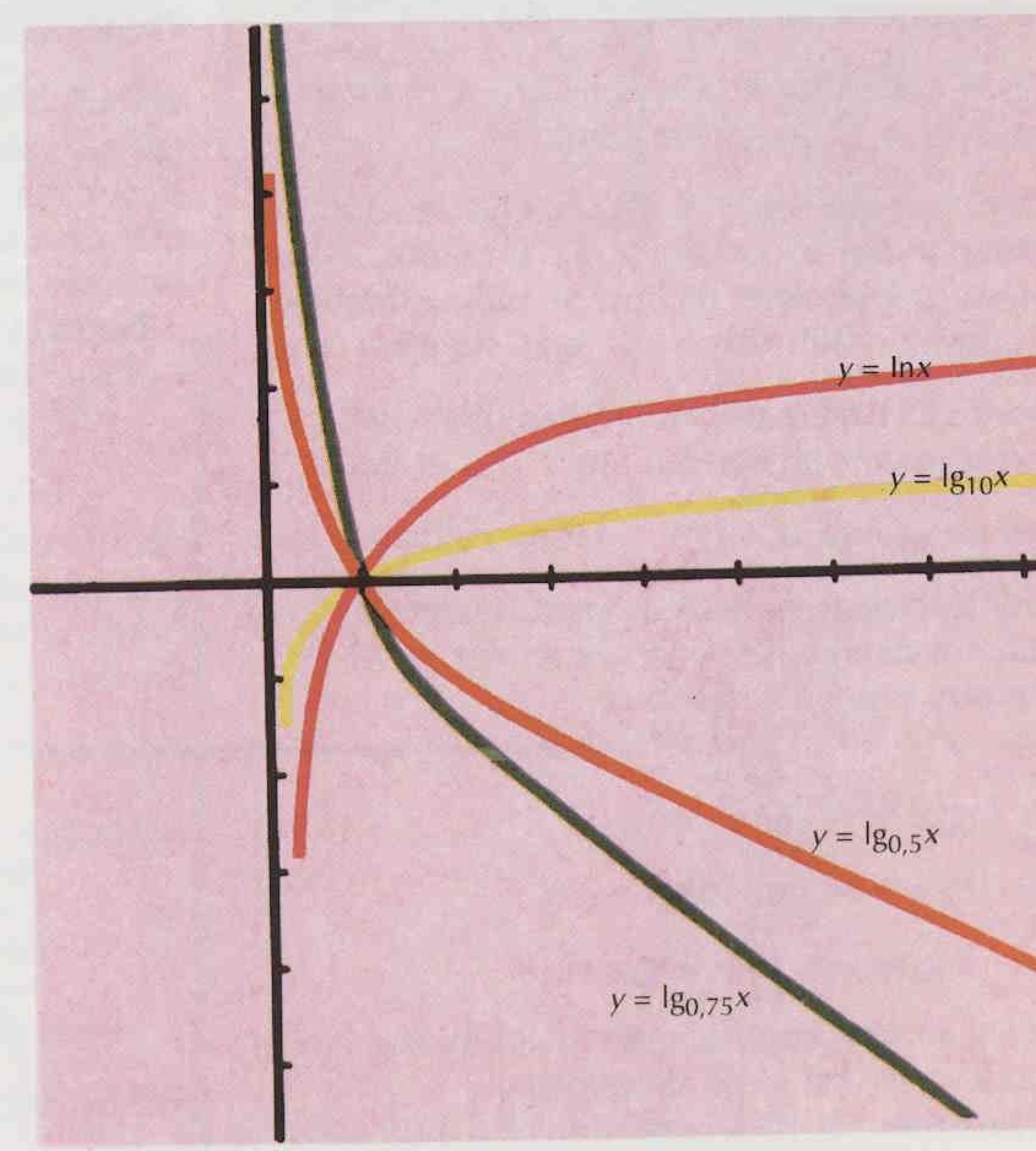


Fig. 4 – Funciones logarítmicas.

LÍMITE FUNCIONAL

Para no referirnos permanentemente al dominio, en adelante, cuando pongamos «$f(x)$ cumple…» deberá entonderse «$f(x)$, si existe, cumple…»
Se dice que la función f tiene *límite* $s \in \mathbf{R}$ cuando x tiene a a, escribiéndose

$$\lim_{x \to a} f(x) = s$$

si $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in$ Dom f y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - s|$. Es decir, intuitivamente, que para x suficientemente cercano a a el valor de $f(x)$ es tan semejante a s como se puede imaginar.
Si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que si $x \in$ Dom f y $x \in (a, a + \delta)$ es $|f(x) - s| < \varepsilon$, diremos que s es el *límite lateral por la derecha de f* cuando x tiende a a, escribiéndose $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = s$. Análogamente se definiría el límite por la izquierda $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Proposición. El límite de una función en un punto existe si y sólo si existen los límites laterales y, además, coinciden.
Diremos que f tienda a $+\infty$ cuando $x \to a$ escribéndose $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ cuando $\forall\ M \in R$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $f(x) > M$ (intuitivamente $f(x)$ se hace tan grande como sea imaginable para x suficientemente cerca de a). Análogamente se definiría $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Si $\forall\ M \in \mathbf{R}$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implique $|f(x)| > M$, pondremos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Obsérvese que las tres definiciones anteriores corresponden a convenios de símbolos, no a límites propiamente dichos. Se utiliza también el convenio $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = M$ que significa que $\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0$ tal que $x > K$ implica $|f(x) - M| < \varepsilon$.
Análogamente se definen $\lim\limits_{x \to -\infty}$ y el $\lim\limits_{x \to \infty}$ (que no es más que $\lim\limits_{|x| \to +\infty}$). Son evidentes las modificaciones necesarias para interpretar los símbolos cuando se tiene $\pm\infty$ en vez de M. Por ejemplo, si $a > 1 > b > 0$ es

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} b^x = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} b^x = +\infty, \quad \lim_{x \to 0} \log_b x = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \log_b x = -\infty$$

Las siguientes proposiciones relacionan el límite funcional con el de sucesiones.
Proposición. Si dada una sucesión $\{a_n\}$ construimos la función

$f(x) = (a_{n+1} - a_n)(x - n) + a_n$, $x \in [n, n + 1]$
entonces $\lim a_n = b$ equivale a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Proposición. Si f es una función tal que $\lim\limits_{x \to a} = b$ y a_n es una sucesión de puntos del dominio (distintos de a) que tiende a a, entonces $\lim f(a_n) = b$. Al revés, si esta condición se cumple para toda sucesión $\{a_n\}$ en las condiciones descritas, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Las dos proposiciones anteriores comportan una analogía completa entre el cáculo de límites de sucesiones y funcionales. Se tiene:
Proposición. Si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, es único.

Proposición. Si existen $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \beta$, entonces existe $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = \alpha + \beta$, si $\beta \neq 0$ existe $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = \alpha^\beta$ (α y β no ambos nulos).
Con la inclusión de la simbología infinito, estas reglas se mantienen respetando el esquema descrito en la tabla de B/2.
Proposición. Si en un entorno de a se tiene $f(x) \leq g(x)$ entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ en caso de que tales límites existan.
Proposición. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ en un entorno de a, y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$, entonces también existe $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ y coincide con los anteriores.
Proposición. Si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, entoces en algún entorno de a la función está acotada.
Las afirmaciones anteriores son también ciertas para cada uno de los límites laterales.
El esquema A de la página contigua recoge los posibles límites de una función polinómica.
• **Ejemplo** (véanse otros en D/1 y D/2).
Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} (6x + 1)/(3x - 2) \text{ si } x > 1 \\ (x^2+3)/(2x) \text{ si } x \leq 1 \end{cases}$$

Por el carácter de $f(x)$ habrá que distiguir si la variable está a la izquierda o a la derecha de 1.
Como Dom $f = \boldsymbol{R} - \{0\}$, si $a \neq 0$ será

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [(x^2 + 3)/2x] = (a^2 + 3)/2a$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = [(6x + 1)/(3x + 2)] = (6a + 1)/(3a + 2)$$

según que $a < 1$, $a > 1$, respectivamente. Además

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} [(x^2 + 3)/2x] = \infty;$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} [(x^2 + 3)/2x] = 2;$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} [(6x + 1)/(3x - 2)] = 7;$$

por lo que no existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. Por otra parte

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [(6x + 1)/(3x - 2)] = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [(x^2 + 3)/2x] = -\infty$$

ESQUEMA A

	$b_n > 0$	$b_n < 0$
$x \to +\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$x \to -\infty$ n par	$+\infty$	$-\infty$
$x \to -\infty$ n impar	$-\infty$	$+\infty$
$x \to a \in \mathbf{R}$	$b_0 + b_1 a + \ldots + b_n a^n$	

$\lim (b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n) =$ ☐

Fig. 1 – Posibles límites de una función polinómica.

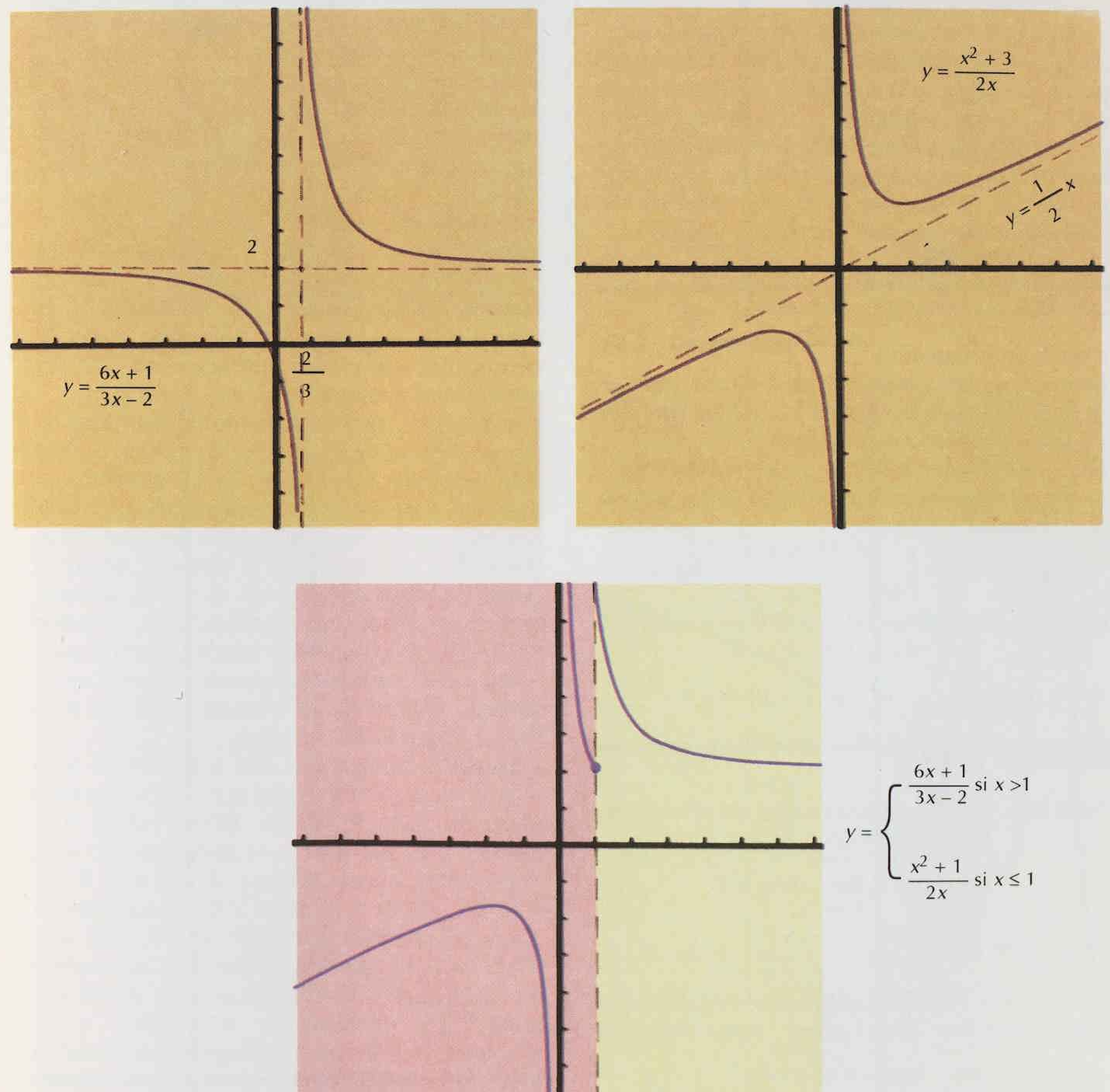


Fig. 2 – Algunas funciones no pueden definirse mediante una expresión única. En la gráfica inferior, la función está descrita por regiones mediante las dos gráficas superiores.

Continuidad

FUNCIONES CONTINUAS

Sea f una función f: $A \to \mathbf{R}$. Diremos que f es *continua* en $a \in A$ si y sólo si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y además, su valor es $f(a)$. Es decir, según la definición de límite, f será continua en $a \in A$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Con menor precisión f es continua en a cuando para x muy cercano a a, $f(x)$ es muy semejante a $f(a)$. O, visualmente, la gráfica de $f(x)$ en las cercanías de a no debe presentar interrupciones ni saltos ni oscilaciones.

Se dice que f es continua en un conjunto cuando lo es en cada punto. Los puntos en los que f no es continua son llamados *de discontinuidad*. f será discontinua en a bien porque cuando x tienda a a, $f(x)$ no tienda a un número real, bien porque, existiendo tal número, no coincida con $f(a)$. Se usan los siguientes términos:

Discontinuidad evitable: cuando $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ pero no es $f(a)$. En tal caso una función $g(x) = f(x)$ si $x \neq a$, $g(a) = \lim_{x\to a} f(x)$ sí sería continua en a.

Discontinuidad inevitable de primera especie (o de salto): cuando existen los límites laterales y son finitos pero no coinciden.

Discontinuidad inevitable de segunda especie (o esencial): cuando no existe, o es ∞, alguno de los límites laterales.

• **Ejemplo**. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 3 \\ 4/(x-3) & x > 3 \end{cases}$ (fig. 1)

tiene una discontinuidad esencial en $x = 3$, pues

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} x^2 = 9$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} (4/(x-3)) = +\infty$$

La función $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ 4/x & x > 2 \end{cases}$ (fig. 2)

tiene en $x = 2$ una discontinuidad de salto, pues,

$$\lim_{x\to2^-} g(x) = \lim_{x\to2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x\to2^+} g(x) = \lim_{x\to2^+} (4/x) = 2$$

La función $h(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ 1/x & x > 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ (fig. 3)

tiene en $x = 1$ una discontinuidad evitable pues $\lim_{x\to1^-} h(x) = \lim_{x\to1^-} x^2 = 1 = \lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^-} (1/x)$ por lo que $\lim_{x\to1} h(x) = 1 \neq 2$ $h(1)$.

La función $s(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & x > 0 \\ \sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$

presenta en $x = 0$ una discontinuidad esencial, pues $\lim_{x\to0^+} s(x) = \lim_{x\to0^+} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe.

Proposición. Si f y g son continuas en a, también lo serán $f + g$ y $f \cdot g$, como asimismo (f/g) en el supuesto de que $g(a)$ no sea 0.

Proposición. Si g es continua en a y f lo es en $g(a)$, $f \circ g$ es continua en a.

Las dos proposiciones anteriores se derivan del cálculo de límites. Su utilidad radica en que a partir de la continuidad de las funciones más elementales, como las polinómicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas (que lo son en todo su dominio), puede demostrarse la continuidad de funciones de aspecto muy complicado sin tener que recurrir a la definición.

Si una función continua en un punto es allí positiva, también lo es en las cercanías, pues la continuidad significa que los valores en las inmediaciones son muy parecidos. Más exactamente:

Proposición. Si f es continua en a, y $f(a) > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que si $x \in (a - \delta, a + \delta)$ entonces $f(x) > 0$ (análogamente si $f(a)$ es menor que 0).

Teorema de Bolzano. Si f es continua en un intervalo $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ (véase ilustración en D/2). El resultado es análogo para $f(a) > 0 > f(b)$.

Este teorema, que se obtiene al considerar la proposición anterior y el mayor de los puntos tales que los $x \in [a, b]$ con $f(x) > 0$ queden a su derecha, tiene una clara visualización: si la gráfica está por debajo del eje de abscisas en a, $(f(a) < 0)$, y por encima en b, $(f(b) > 0)$, en algún punto c deberá cortar al eje $(f(c) = 0)$, siempre que no se produzcan interrupciones ni saltos (D/2 fig 2). Este resultado puede utilizarse para hallar soluciones de ecuaciones de forma aproximada, dividiendo de manera cada vez más fina el intervalo del teorema.

• **Ejemplo**. Busquemos una solución de $x^3 - 4x + 1 = 0$. La función $f(x) = x^3 - 4x + 1$ es continua en todo **R**. Como $f(1) = -2 < 0$ y $f(2) = 1 > 0$, existirá $c \in (1,2)$ tal que $f(c) = 0$. Avanzando ahora décima a décima $f(1,1) < 0$, ... , $f(1,8) < 0$, $f(1,9) > 0$. Descendiendo ahora por centésimas $f(1,89) > 0$, $f(1,88) > 0$, $f(1,87) > 0$, $f(1,86) < 0$, lo que sitúa la solución en $f(1,86, 1,87)$. Así sucesivamente, puede llegarse, por ejemplo a $f(1,86080) < 0$, $f(1,860801) > 0$ con lo que puede tomarse la solucion $x = 1,860805$ y el error cometido no exceda 5 millonésimas (y se puede seguir aproximando tanto como se desee).

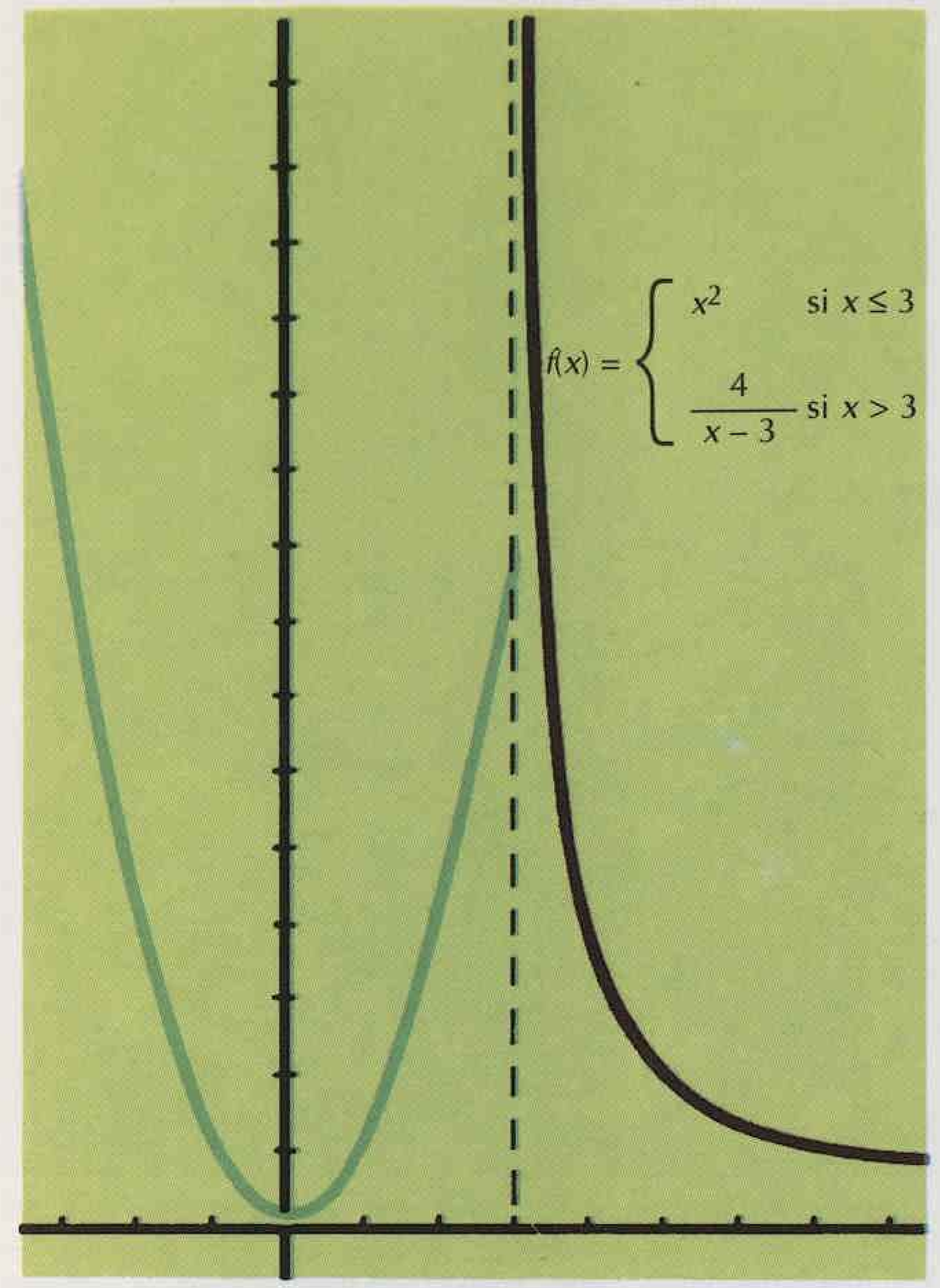


Fig. 1 – Discontinuidad esencial.

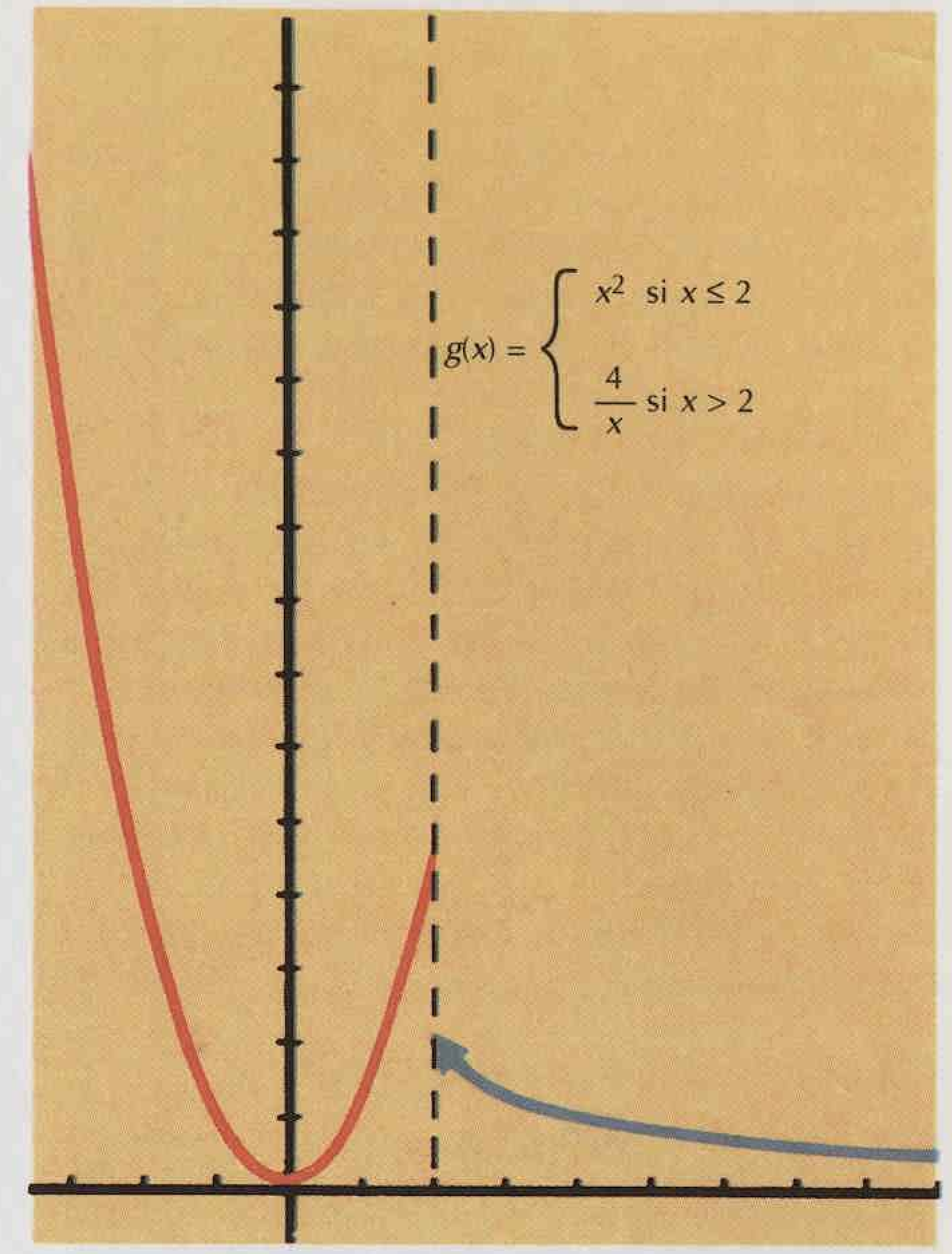


Fig. 2 – Discontinuidad de salto.

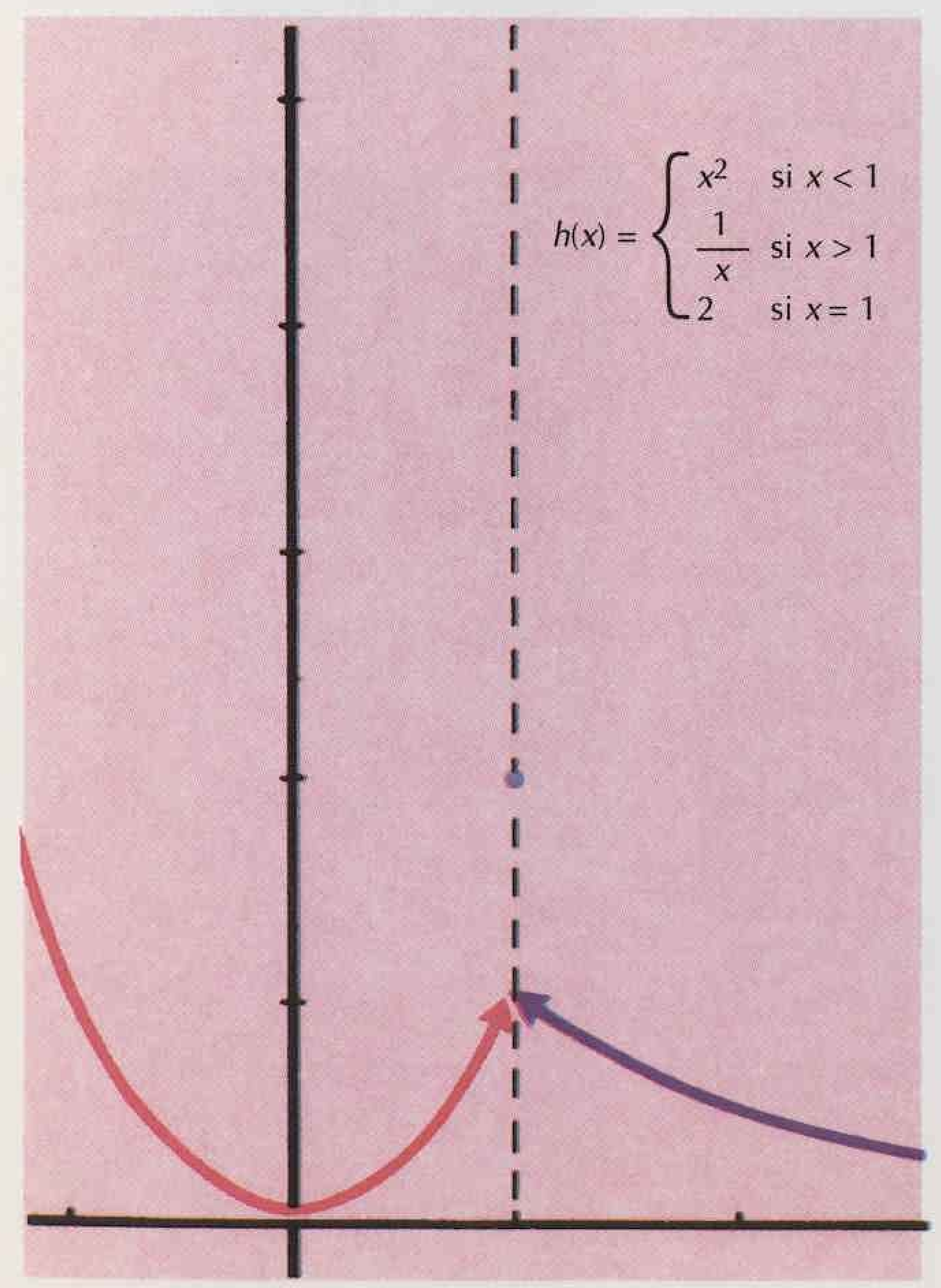


Fig. 3 – Discontinuidad evitable.

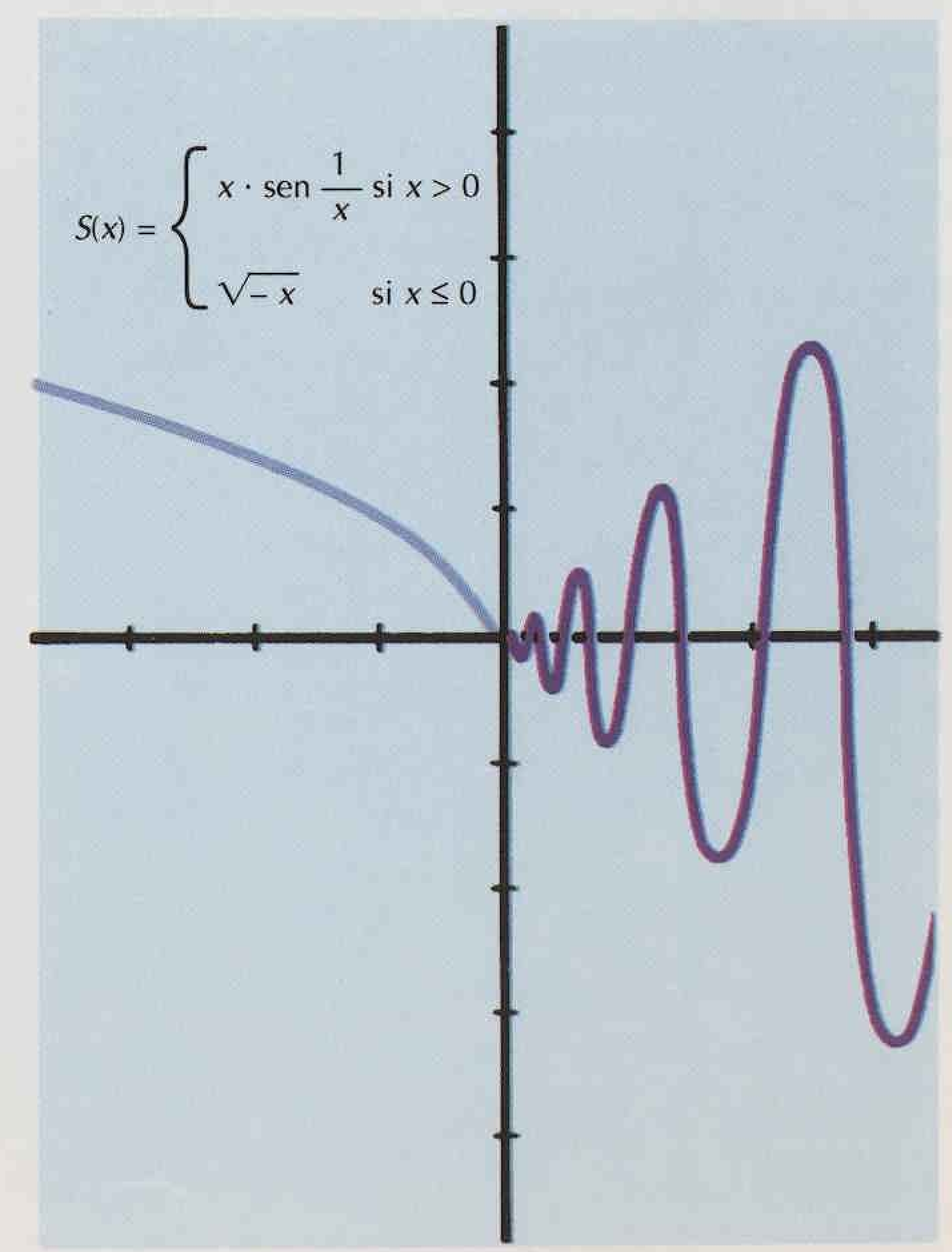


Fig. 4 – *S* es continua en el origen.

Proposición. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada en $[a, b]$.
Es decir, existen números reales k y m tales que $k \leq f(x) \leq m \ \forall\ x \in [a, b]$.
Además las cotas pueden encontrarse como valores tomados por la propia función:
Teorema de Weierstrass. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f alcanza máximo y mínimo en $[a, b]$ es decir, existen $\alpha, \beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$, $\forall\ x \in [a, b]$.
Este teorema se completa con:
Si f es continua en $[a, b]$, donde alcanza un máximo $M = f(\beta)$ y un mínimo $m = f(\alpha)$, para todo $k \in (m, M)$ existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.
Es decir, f toma todos los valores intermedios entre su mínimo y su máximo.
Se dice que f es *uniformemente continua* en el conjunto A cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $a, b \in A$ cumple $|a - b| < \delta$, entonces $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$.
Teorema de Heine. Si f es continua en $[a, b]$, f es uniformemente continua en dicho intervalo.

Convergencia uniforme y continuidad

Si $\{f_n\}$ es una sucesión funcional que converge en A uniformemente a f, y cada f es continua en un punto $x_0 \in A$, también f es continua en x_0.
Si la serie Σf_n converge uniformemente en A hacia la función f, y cada f_n es contina en $x_0 \in A$, también f es continua en x_0. En particular, toda función desarrollable en serie de potencias es continua en todo punto del intervalo de convergencia.

Cálculo de límites funcionales

Si en el cálculo de límites cuando $x \to a$ las funciones que intervienen son continuas en a, bastará sustituir x por a en la expresión cuyo límite se busca y, eventualmente, resolver una posible indeterminación.

• **Ejemplos.**

Al sustituir x por -2 en $\dfrac{3x^2 + 14x^2 + 20x - 8}{2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 4x - 4}$

obtenemos la indeterminación 0/0. Sin embargo

$$3x^2 + 14x^2 + 20x - 8 = (x + 2)^2\,(3x + 2),$$

$$2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 4x - 4 = (x + 2)^2\,(2x^2 - 1),$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + 14x + 20x - 8}{2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 4x - 4} =$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x + 2}{2x^2 - 1} = \frac{4}{7}$$

....

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1-x^3}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x^3) - (x - 1)}{(x-1)(1-x^3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(-1 - x - x^2) - (x - 1)}{(x-1)(1-x^3)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{4}{x^3 - 1} = \infty$$

....

$\displaystyle\lim_{x \to 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$ es indeterminado 0/0, pero

$$\lim_{x \to 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} \cdot \frac{2 + \sqrt{x-3}}{2 + \sqrt{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{4 - (x-3)}{(x+7)(x-7)(2 + \sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56}\,.$$

$\displaystyle\lim_{x \to 0} (2 + x)^{1/x} \equiv 2^{\infty}$ que no existe pues $2^{+\infty} = +\infty$ y $2^{-\infty} = 0$. Sin embargo

$$\lim_{x \to 0} (2 + x)^{1/x^2} = 2^{+\infty} = +\infty$$

....

$$\text{Si } \lim_{x \to a} f(x) = 0^+,\ \lim_{x \to a} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e,$$

$$\text{y si } \lim_{x \to b} g(x) = \infty,\ \lim_{x \to b} \left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{1/g(x)} = e.$$

Por ejemplo,

$$= \lim_{x \to 1+} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x \to 1+} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^{\sqrt{x-1}\ \sqrt{x+1}} =$$

$$= e^{\lim} \sqrt{x+1} = e\sqrt{2}$$

Algunos límites se calculan cambiando la variable:

$$\lim_{x \to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} = \lim_{x \to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}\, \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 8} =$$

$$\lim_{x \to 64} \frac{x - 64}{(\sqrt[3]{x} - 4)\,(\sqrt{x} + 8)} = \frac{1}{16} \lim_{x \to 64} \frac{x - 64}{\sqrt[3]{x} - 4} =$$

(haciendo $x = y^3$, $x \to 64$ equivale a $y \to 4$)

$$= \frac{1}{16} \lim_{y \to 4} \frac{y^3 - 64}{y - 4} = 3$$

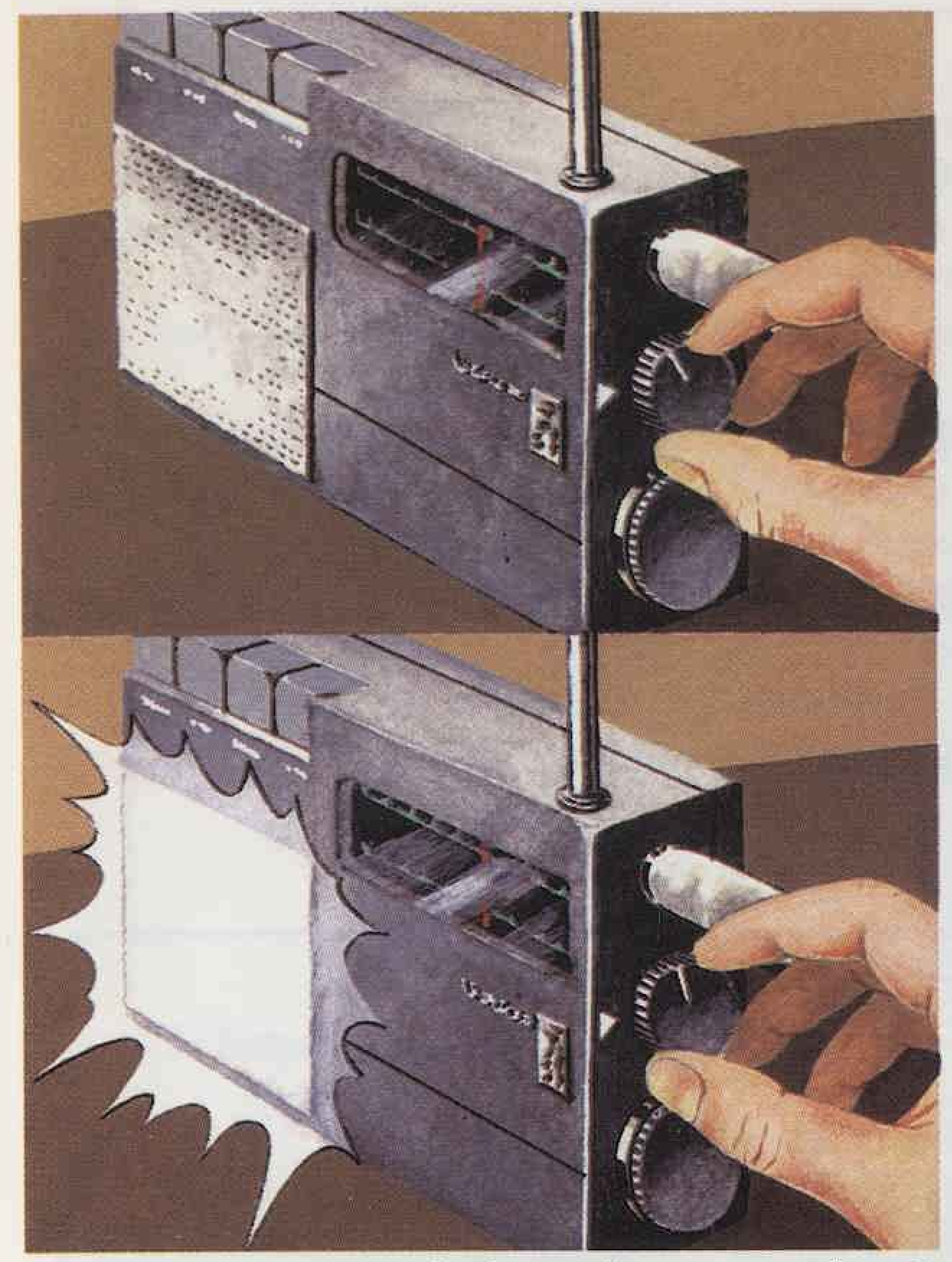


Fig. 1 – Frecuentemente el volumen de un aparato de radio no responde con continuidad al mando regulador: una pequeña variación en su posición a veces acrecienta enormemente el sonido sin pasar por los volúmenes intermedios.

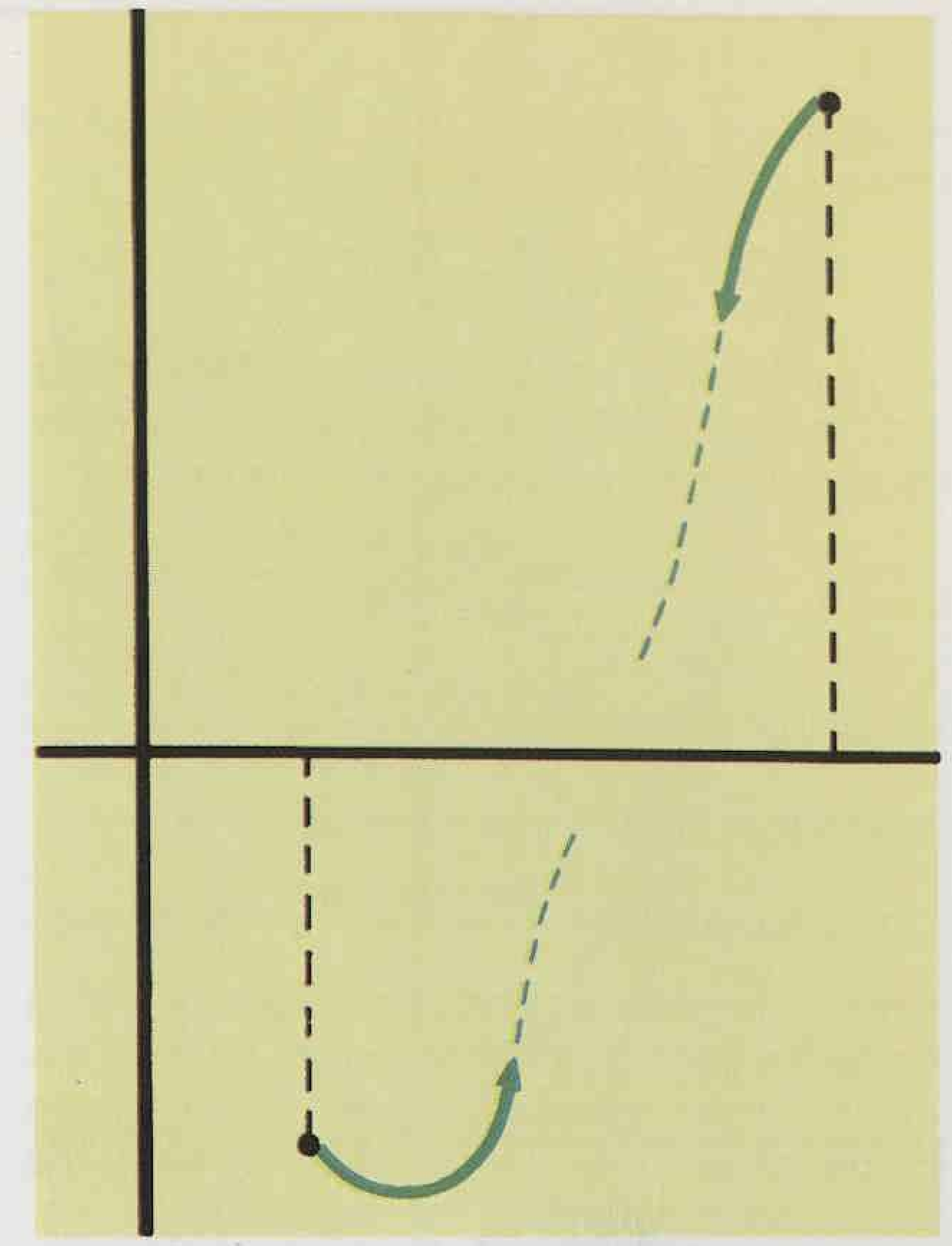


Fig. 2 – Teorema de Bolzano. Si la gráfica está en a por debajo de la horizontal, en b por encima y es continua en $[a, b]$ (no se rompe), parece claro que deberá «cortarla». La dificultad está en la «densidad» de la horizontal.

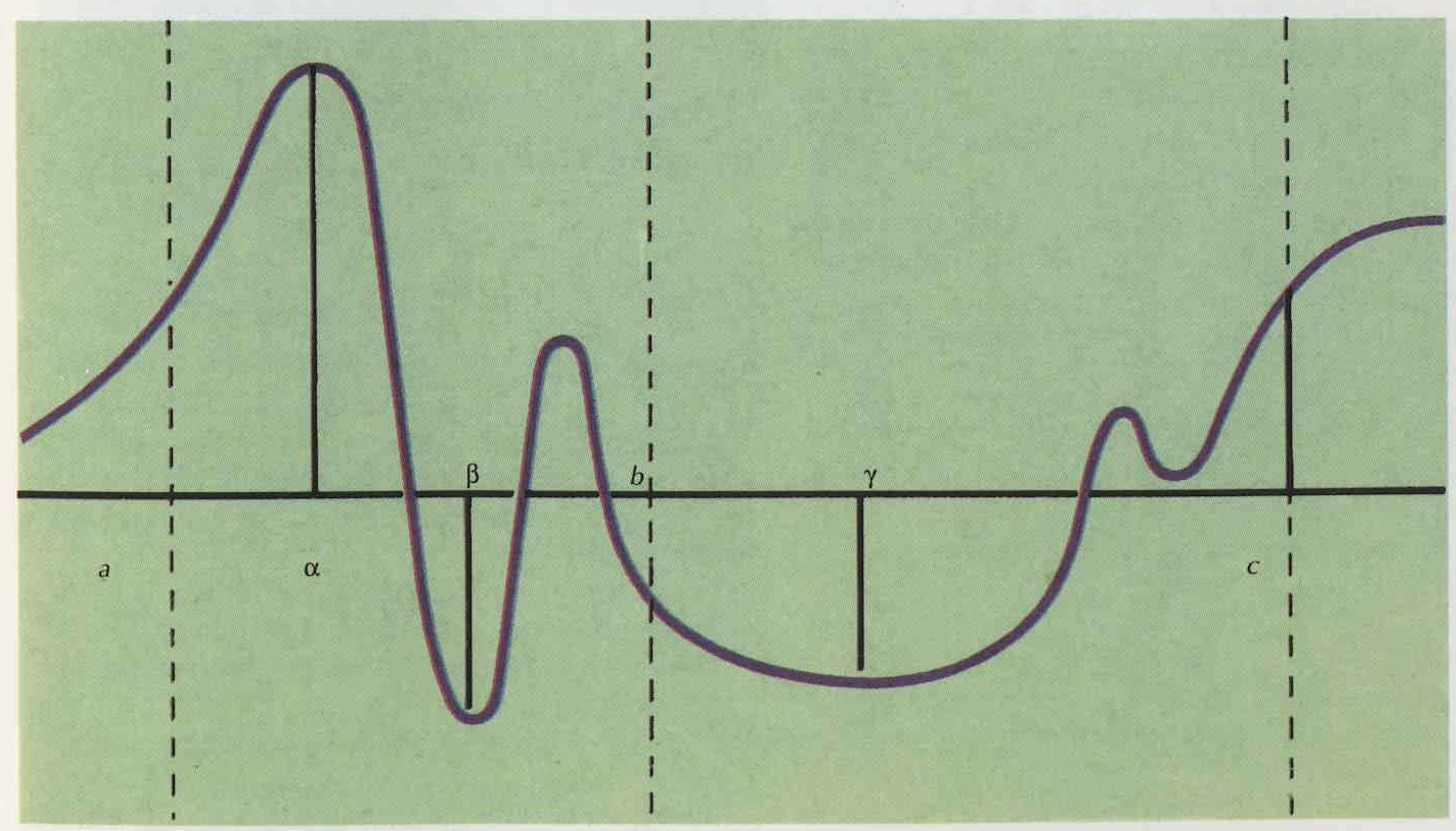


Fig. 3 – En el intervalo $[a, b]$ la función alcanza en α su valor máximo y en β su valor mínimo. En el intervalo $[b, c]$ el valor mínimo lo toma en γ y el máximo en c.

Funciones derivables

Se dice que la función f es *derivable en el punto a*, cuando existe el límite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

cuyo valor, en tal caso, se denota $f(a)$ y se denomina *derivada de f en el punto a*. Son expresiones absolutamente equivalentes a la anterior

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

o bien $f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

sin más que hacer $x-a=h=\Delta x$.

Si observamos que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ es la pendiente de la recta secante que corta a la gráfica de f en los puntos $(a\ f(a))$ y $(a\ f(a+h))$, y recordamos que la tangente a la gráfica en el punto de abscisa a no es sino la posición límite de tales secantes (véase fig. 1), tendremos:
La derivada de f *en el punto de abscisa* a, *es la pendiente de la recta tangente a la curva* y = f(x) *en el punto* (a, f(a)).

• **Ejemplo.** La derivada de la función $f(x)=x^2$ en el punto 2 es el número 4 pues

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=4$$

por lo que la recta tangente a la parábola $y=x^2$ (fig. 2) en el punto (2, 4) es

$$y-4=4(x-2)\text{ o sea }4x-y-4=0.$$

La inexistencia de tangente conlleva la inexistencia de la derivada. Ambos conceptos son identificables salvo en las tangentes verticales, de pendiente no finita, en cuyo caso, aunque escribamos

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$$

el límite (es decir, $f'(a)$), no existe propiamente.
Se dice que f es *derivable por la izquierda* en el punto a cuando existe el límite lateral

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(h)-f(a)}{x-a}$$

cuyo valor se denota $f'_-(a)$ y se denomina derivada lateral de f por la izquierda en el punto a. Sería la pendiente de la tangente por la izquierda, posición límite de las secantes por la izquierda. Análogamente, si existiera, se definiría la derivada por la derecha $f'_+(a)$ tomando el límite para $x\to a^+$ que correspondería a la tangente por la derecha (véase fig. 3).

Si a tiene un entorno contenido en el dominio de f, la derivada $f'(a)$ existe si y sólo si existen las derivadas laterales, $f'_-(a)$ y $f'_+(a)$ y, además, coinciden.
La relación entre funciones continuas y funciones derivables es la siguiente:
Proposición. Si f tiene derivadas laterales (iguales o no) en el punto a, entonces f es continua en a.
Corolario. Si f es derivable en a, f es continua en a.
Las recíprocas, sin embargo, no son ciertas.

• **Ejemplos.** La función (fig. 3)

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\le 1\\ 2-x^3 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

es continua en $x=1$, pues

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=1=f(1);$$

pero f no es derivable en 1, ya que

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2=f'(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2-x^3}{x-1}=-3=f'_+(1)$$

....

La función (fig. 4)

$$g(x)=\begin{cases}x\text{ sen }(1/x) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

es continua en el origen, pues el seno está entre -1 y 1, $|x\text{sen}(1/x)|<|x|$, con lo que hallamos

$$\lim_{x\to 0}x\text{sen }(1/x)=0\ (=g(0)).$$

En cambio $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\text{ sen }\dfrac{1}{x}$

que sería $g'_+(0)$ no existe, como tampoco $g'_-(0)$.

Los dos ejemplos anteriores ponen de manifiesto que la continuidad no permite asegurar la existencia de la derivada, ni siquiera de las laterales.
Para funciones sencillas, la no derivabilidad en un punto se reconocerá en la gráfica porque la función no será ahí continua, o bien siéndolo, presenta un ángulo.
Pueden encontrarse funciones, aunque no sencillas, continuas en todos los puntos y no derivables en ninguno, como la suma de la serie

$$\Sigma(D(2^{n+1}x))/2^{n+1}$$

donde $D(y)$ es la distancia de y al entero más próximo (véase lámina E/2).

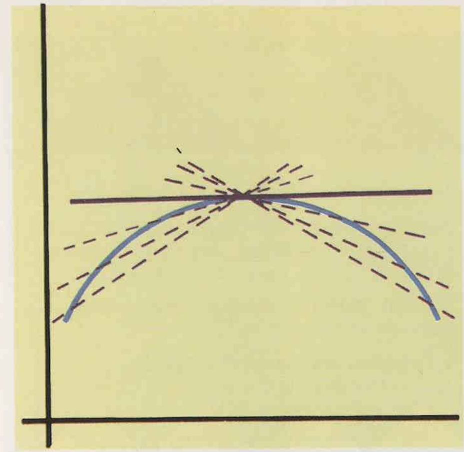


Fig. 1 – La tangente como límite de secantes.

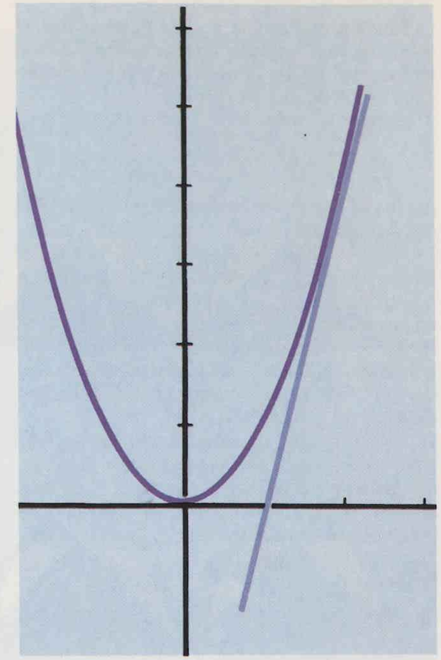


Fig. 2 – Tangente a la parábola $y=x^2$ en el punto (2, 4).

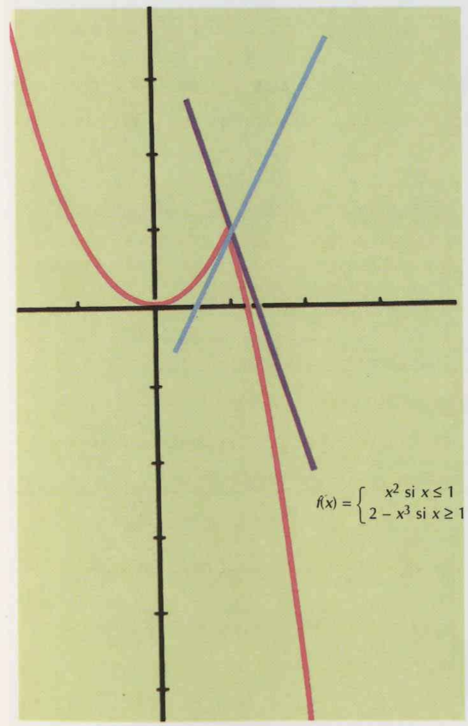


Fig. 3 – Tangentes laterales no coincidentes.

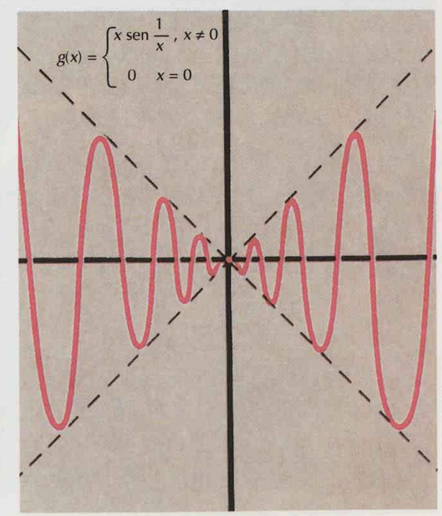


Fig. 4 – Inexistencia de tangentes laterales.

CÁLCULO DE DERIVADAS

La función que asigna a cada número real el valor que en él tiene la derivada de f (allí donde ésta exista), recibe el nombre de *función derivada de f*, y se denota f'.

- **Ejemplo.** Sea $f(x) = x^2$. La derivada en a es

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a,$$

por lo que la función derivada de f es $f'(x) = 2x$, o sea $(x^2)' = 2x$.

El dominio de f' no será, en general, igual al de f, sino un subconjunto de él (pero en lo sucesivo no nos detendremos en tales consideraciones).

La función derivada de f' es denominada *función derivada segunda de f*, denotada f''. O sea, $(f')' = f''$. Por recurrencia se define $f^{n)}$, *enésima derivada* de la función f.

El cálculo directo de las derivadas de las funciones más sencillas, y la obtención de unas reglas de derivación, permiten eludir el recurso a la definición cuando se buscan derivadas de funciones elementales.

Reglas de derivación

[S] Derivada de la suma. Si f y g son derivables en a, también lo es $f + g$, siendo

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

[P] Derivada del producto. Si $f\,g$ son derivables en a, también lo es $f{\cdot}g$, siendo

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a) g'(a).$$

[C] Derivada del cociente. Si f y g son derivables en a, con $g(a) \neq 0$, también lo es f/g, siendo

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

[RC] Regla de la cadena (derivada de la función compuesta). Si f es derivable en a y g lo es en $f(a)$, $g \circ f$ es derivable en a, siendo

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

[P] Derivada de la función inversa. Se tiene

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))},$$

(si existen las expresiones involucradas).

Las generalizaciones de [S], [P] y [RC], obtenibles por recurrencia, son:

[SG]. $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(a) = f'_1(a) + f'_2(a) + \ldots + f'_n(a)$.

[PG]. $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)'(a) = f'_1(a) \cdot f_2(a) \cdot \ldots \cdot f_n(a) +$
$+ f_1(a) \cdot f'_2(a) \cdot f_3(a) \cdot \ldots \cdot f_n(a) +$
$+ f_1(a) \cdot f_2(a) \cdot f'_3(a) \cdot \ldots \cdot f_n(a) +$
....
$+ f_1(a) \cdot f_2(a) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(a) \cdot f'_n(a)$.

[RCG]. $(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n)'(a) = f'_1((f_2 \circ \ldots \circ f_n)(a)) \cdot f'_2((f_3 \circ \ldots \circ f_n)(a)) \cdot \ldots \cdot f'_{n-1}(f_n(a)) \cdot f'_n(a)$.

Derivadas de las funciones elementales

Funciones constantes. Usando la definición de f', si $f(x) = K$ ($K \in \mathbf{R}$) entonces $f'(x) = 0$, además $(K{\cdot}f)' = K' \cdot f + K \cdot f' = 0 \cdot f + K \cdot f' = K \cdot f'$.

Función potencial de exponente natural. La derivada de $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$.

- **Ejemplos.** Sea $f(x) = 2x^3 + 3x - 7$.

Si $\quad f'(x) = 2 \cdot (x^3)' + 3 \cdot (x)' - (-7)' =$
$= 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 1 - 0 = 6\,x^3 + 3$

....

$$\left(\frac{3x - 5}{x^2 + 3}\right)' = \frac{(3x - 5)'\,(x^2 + 3) - (3x - 5)\,(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} =$$

$$= \frac{3\,(x^2 + 3) - (3x - 5)\,2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-3x^2 + 10x + 9}{x^4 + 6x^2 + 9}$$

....

$$f(x) = (x^2 + 1) + (x^3 + 2) + (x^4 + 3)$$

$$f(x) = 2x \cdot (x^3 + 2) + (x^4 + 3) +$$
$$+ (x^2 + 1)\, 3x^2 \cdot (x^4 + 3) + (x^2 + 1)(x^3 + 2) \cdot 4x^3.$$

....

Para derivar $g(x) = (x^2 + 3)^{17}$, basta tener en cuenta que si $p(x) = x^2 + 3$ y $q(x) = x^{17}$ se tiene $g = q \circ p$, $q'(a) = 17a^{16}$, $p'(a) = 2a$ con lo que $g'(x) = q'(p(x)){\cdot}p'(x) = q'(x^2 + 3) \cdot 2x = 17(x^2 + 3)^{16} \cdot 2x$.

Derivada de las funciones circulares. Con la definición y $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 2 \cos \frac{x + a}{2} \operatorname{sen} \frac{x - a}{2}$ se obtiene la derivada del seno. Como $\cos x = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$, aplicando [RC]:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \ (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \ (\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

$$(\operatorname{cosec} x)' = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = (\sec x)' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.$$

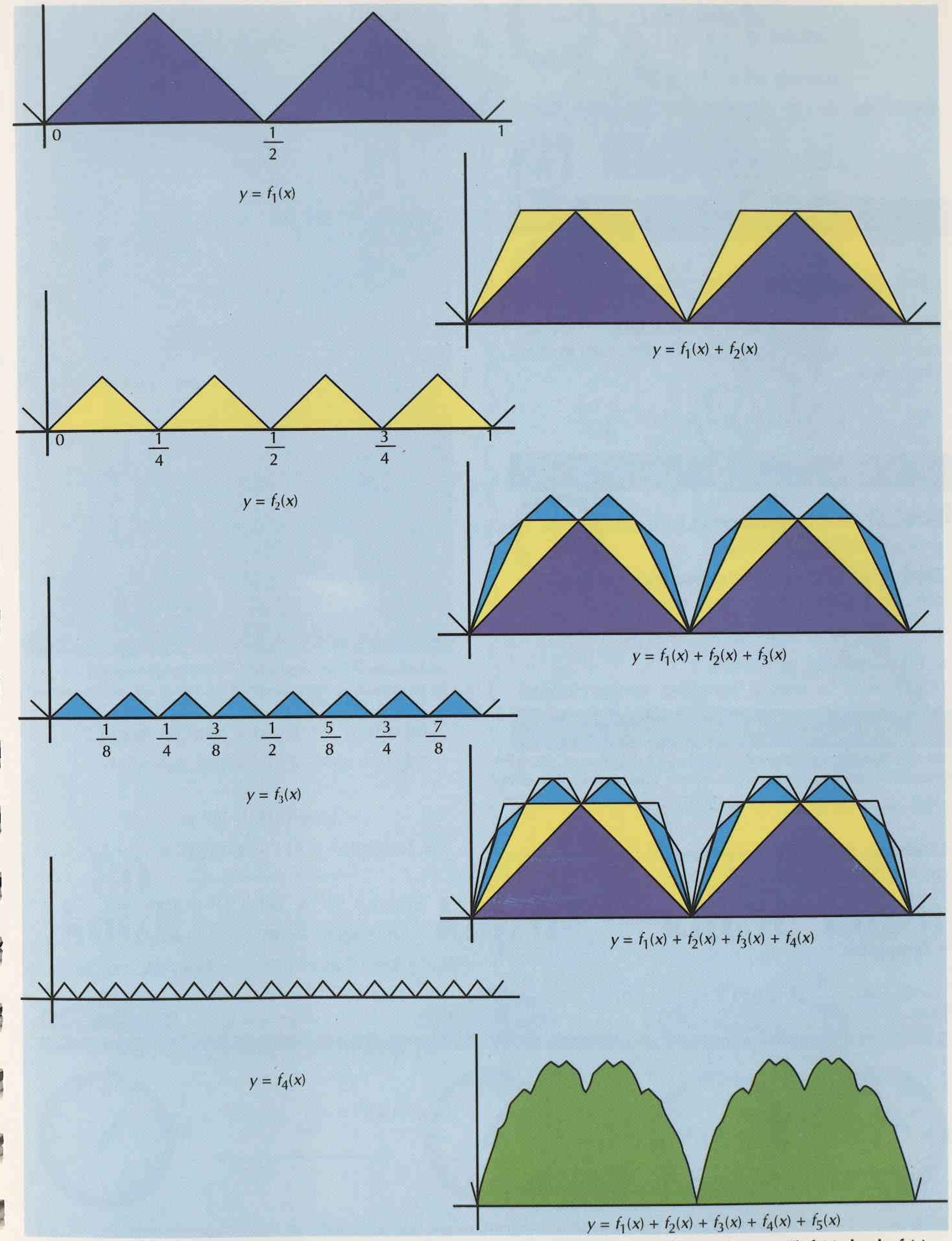


Fig. 1 – Aproximaciones sucesivas de la función continua en todo punto, pero no derivable en ninguno, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ donde $f_n(x) = [D(2^{n+1}x)]/2^{n+1}$ siendo $D(y)$ la distancia de y al entero más cercano.

Para las funciones circulares inversas, es

$$(\text{arctg } x)' = 1 / (1 + x^2)$$

$$(\text{arcsen } x)' = 1 / \sqrt{1 - x^2}$$

$$(\text{arccos } x)' = -1 / \sqrt{1 - x^2}$$

Derivada de la función logarítmica. Como

$$\frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \ln\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}},$$

la definición de f', y [RC], nos dan $(\ln x)' = 1/x$, $(\log_a x)' = 1 / (x \cdot \ln a)$. También se tiene

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

Derivación logarítmica. Si $f(x) = (g(x))^{h(x)}$ tomando logaritmos, $\ln f(x) = h(x) \cdot \ln g(x)$, con lo que, derivando,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$f'(x) = f(x)\left[h'(x) \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}\right].$$

Es usual no memorizar esta fórmula, pero sí el procedimiento.

Derivada de la función exponencial. Con [I], o con derivación logarítmica, resulta

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a \in \mathbf{R})$$

y, en particular, $(e^x)' = e^x$.
(Obsérvese la mayor sencillez proporcionada por logaritmos y exponenciales de base e). A partir de aquí es inmediato obtener las derivadas de las funciones hiperbólicas definidas en C/3

$$(\text{sh } x)' = \text{ch } x,\ (\text{ch } x)' = \text{sh } x\ (\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}.$$

Derivada de la función potencial. Si $k \in \mathbf{R}$, por derivación logarítmica se obtiene

$$(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$$

- **Ejemplos.**

$$\left(x^7 - \frac{5}{3}x^5 + 2x^3 + \frac{3x}{10} - 10\right)' =$$

$$= \left(7x^6 - \frac{25}{3}x^4 + 6x^2 + \frac{3}{10}\right).$$

....

$$[\sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt[3]{2}]' = [(x^2+1)^{1/3} + \sqrt[3]{2}]' =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{-2/3} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.$$

....

$$(e^{(x^2+3)})' = e^{(x^2+3)} \cdot 2x$$

....

$$[\ln (x^2+3)]' = \frac{2x}{(x^2+3)}$$

....

$$\left(\frac{e^{2x}}{x}\right)' = \frac{2e^{2x} \cdot x - e^{2x}}{x^2}.$$

....

$$(\text{sen } e^x)' = (\cos e^x) \cdot e^x.$$

....

$$f_1(x) = 7 \cos x,\ f'_1(x) = -7 \text{ sen } x$$

$$f_2(x) = \cos 7x,\ f'_2(x) = -\text{sen } 7x \cdot (7x)',$$

$$f'_2(x) = -\text{sen } 7x \cdot 7.$$

$$f_3(x) = x \cdot \cos 7,\ f'_3(x) = \cos 7.$$

$$f_4(x) = \cos (x^7) \cdot f'_4(x) = -\text{sen}(x^7) \cdot (x^7)'$$

$$f'_4(x) = -7x^6 \text{sen } (x^7).$$

$$f_5(x) = \cos^7 x,\ f'_5(x) = -7 \cos^6 x (\cos x)'$$

$$f'_5(x) = -7\cos^6 x \text{ sen } x.$$

$$f_6(x) = \cos(7^x),\ f'_6(x) = -\text{sen } (7^x) \cdot (7^x)',$$

$$f'_6(x) = -7^x \cdot \ln 7 \cdot \text{sen } (7^x).$$

$$f_7(x) = 7^{\cos x},\ f'_7(x) = 7^{\cos x} \ln 7 (\cos x)'$$

$$f'_7(x) = -7^{\cos x} \cdot \ln 7 \cdot \text{sen } x.$$

$$f_8(x) = (\cos 7)^x,\ f'_8(x) = (\cos 7)^x \ln \cos 7.$$

$$f_9(x) = x^{\cos 7},\ f'_9(x) = \cos 7 x^{(\cos 7)-1}.$$

....

$$(\cos^3(3x^2+1))' =$$

$$= 3\cos^2(3x^2+1) \cdot (-\text{sen } (3x^2+1)) \cdot 6x.$$

....

$$\text{Si } f(x) = [(x^5 + 3x^4 + 1)^8 + \text{sen}^3 2x]^5,$$

$$f'(x) = 5[(x^5 + 3x^4 + 1)^8 + \text{sen}^3 2x]^4 \cdot$$

$$\cdot [8(x^5+3x^4+1)(5x^4+12x^3)+3 \text{ sen}^3 2x \cdot \cos 2x \cdot 2]$$

$$(x^2 e^x \text{ sen } x)' =$$

$$= 2xe^x \text{ sen } x + x^2 e^x \text{ sen } x + x^2 e^x \cos x.$$

....

$$[\ln(\ln x)]' = \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}.$$

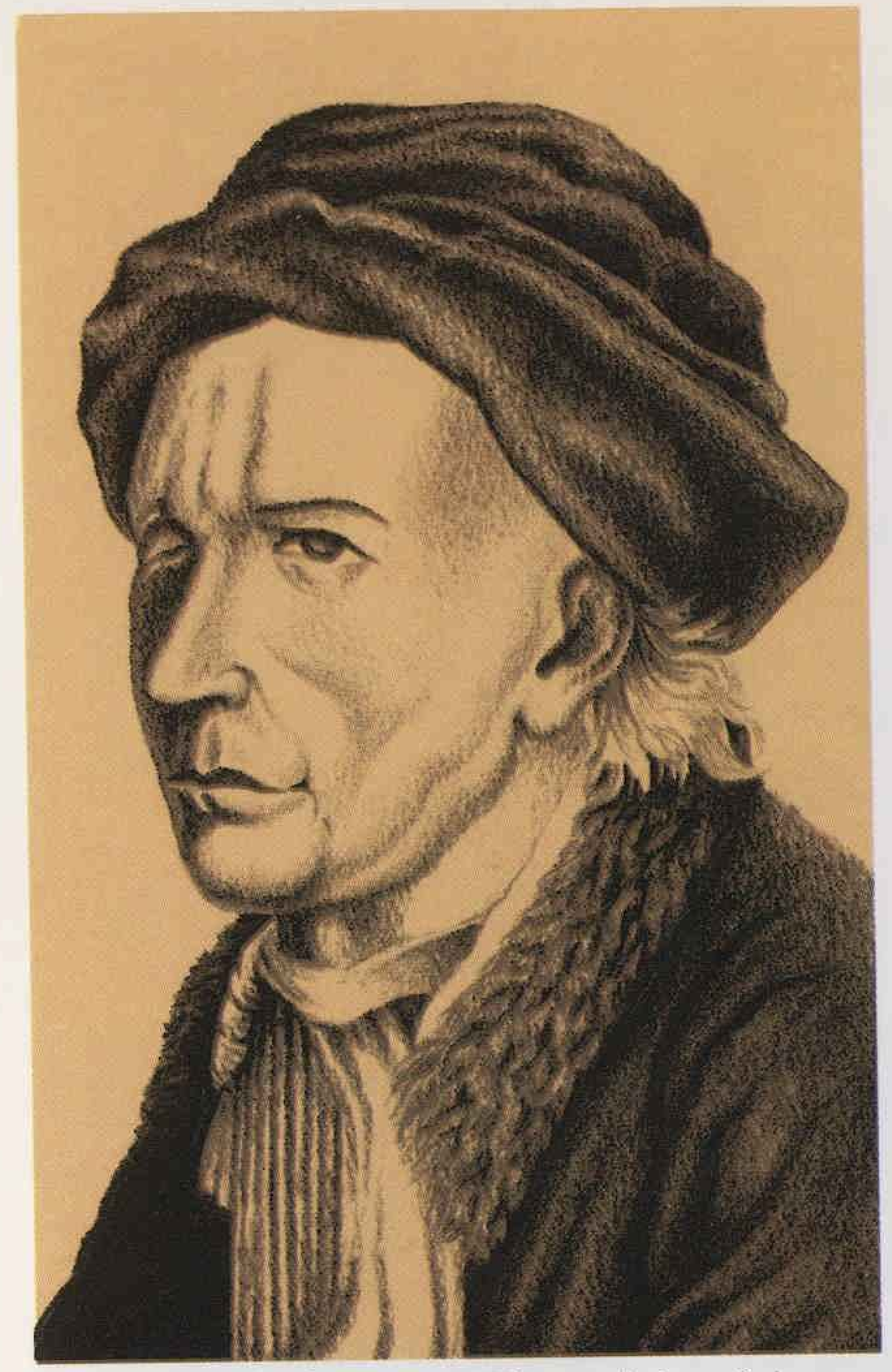


Fig. 1 – Leonard Euler (1707-1783), uno de los más importantes matemáticos de la historia, especialmente en el campo del Análisis.

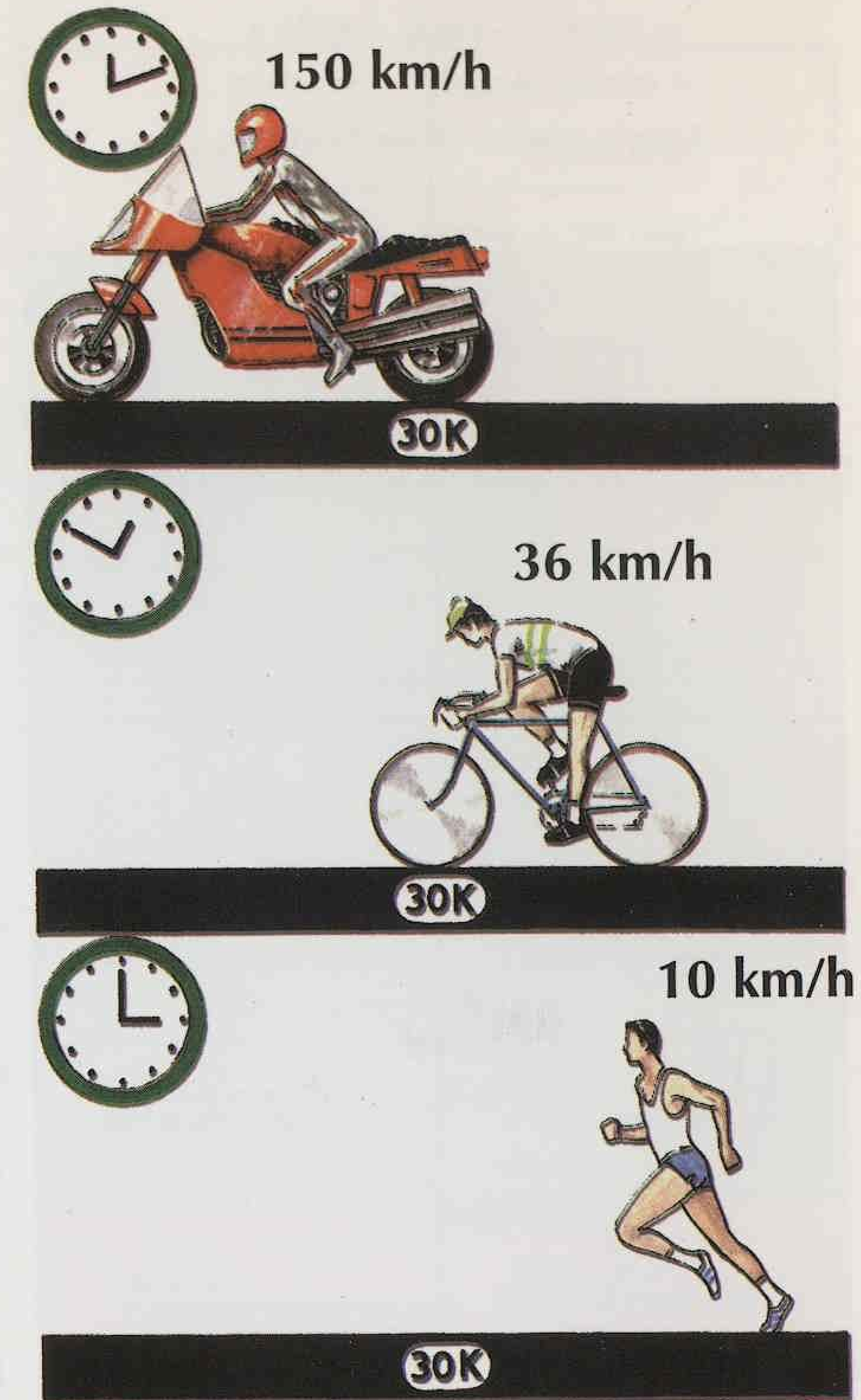


Fig. 2 – La velocidad o variación del espacio recorrido en función del tiempo sólo puede definirse en sentido instantáneo mediante el uso de la derivada.

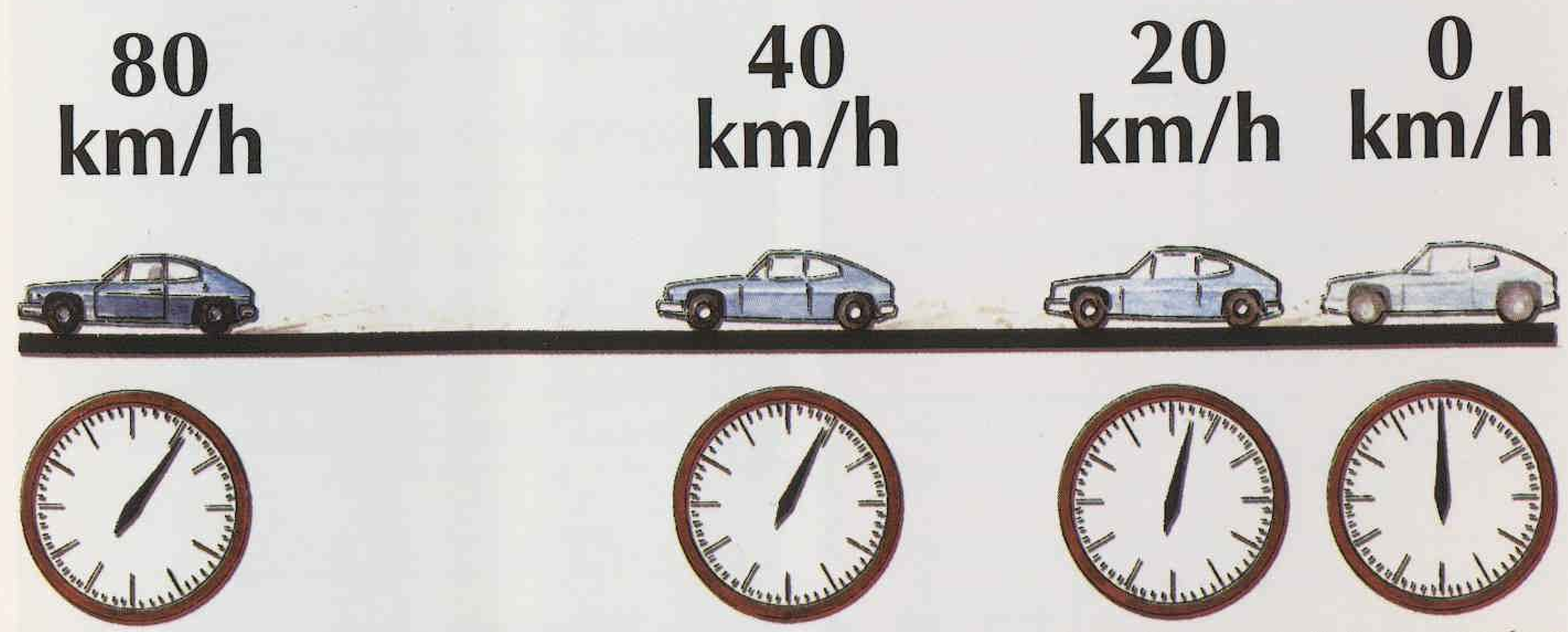


Fig. 3 – La aceleración instantánea es el límite del cociente del incremento de velocidad por el incremento de tiempo, cuando este último tiende a cero, es decir, la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$[\text{sen}^3 x \cdot \cos^4 x]' =$$
$$= (3\text{sen}^2 x \cdot \cos x) \cdot \cos^4 x +$$
$$+ \text{sen}^3 x \cdot (4\cos^3 x \cdot (-\text{sen} x)) =$$
$$3\text{sen}^3 x \cos^5 x - 4\ \text{sen}^4 x \cos^3 x.$$

....

$$[e^{\text{sen}\,4x}]' = e^{\text{sen}\,4x} \cdot \cos 4x \cdot 4$$
$$[\text{sen}(e^{2x})]' = \cos e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2.$$
$$(x^{\text{sen}\,2e})' = \text{sen}\,2e \cdot x^{\text{sen}\,2e-1}.$$

....

$$[\cos(\ln(x^3-1))]' = -\text{sen}(\ln(x^3-1)) \cdot \frac{3x^2}{x^3-1}$$

....

$$[\ln(\cos(x^3-1))]' =$$
$$= \frac{1}{\cos(x^3-1)} \cdot (-\text{sen}(x^3-1)) \cdot 3x^2.$$

....

$$[\ln^3(\cos(x-1))]' =$$
$$= 3\ \ln^2(\cos(x-1)) \cdot \frac{1}{\cos(x-1)} \cdot (-\text{sen}(x-1))$$

....

$$[\ln(\cos^3(x-1))]' =$$
$$= \frac{1}{\cos^3(x-1)} \cdot 3\ \cos^2(x-1) \cdot (-\text{sen}(x-1)).$$

....

$$[\text{tg}^3(\cos^4(\ln^5(x^6)))]' =$$
$$= 3\ \text{tg}^2(\cos^4(\ln^5(x^6))) \cdot \frac{1}{\cos^2(\cos^4(\ln^5(x^6)))} \cdot$$
$$4\ \cos^3(\ln 5(x^6)) \cdot (-\text{sen}(\ln 5(x^6)).$$
$$\cdot\ 5\ \ln^4(x^6) \cdot \frac{6x^5}{x^6}.$$

....

$$[\text{arctg}^3(\text{arctg}^2(\text{arctg}\ x))]' =$$
$$= 3\ \text{arctg}^2(\text{arctg}^2(\text{arctg}\ x)) \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{1+\text{arctg}^4(\text{arctg}\ x)} \cdot 2\ \text{arctg}(\text{arctg}\ x) \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{1+\text{arctg}^2\ x} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

....

$$[\log_3(\text{sh}\ 10^{x^2})]' =$$
$$= \frac{1}{\ln 3}\ \frac{1}{\text{sh}\ 10^{x^2}} \cdot \text{ch}\ 10^{x^2} \cdot 10^{x^2} \cdot \ln 10 \cdot 2x.$$

....

Sea $g(x) = \sqrt[3]{\text{sen}\ (x^2 + e^x \cdot \text{sen}\ \frac{x}{\cos x})}$

$$g'(x) = \frac{1}{3}\left[\text{sen}\left(x^2 + e^x \cdot \text{sen}\ \frac{x}{\cos x}\right)\right]^{-2/3}.$$
$$\cdot \cos\ (x^2 + e^x \cdot \text{sen}\ \frac{x}{\cos x}) \cdot$$
$$\cdot\ (2x + e^x \cdot \text{sen}\ \frac{x}{\cos x} + e^x \cdot \cos \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x + x\ \text{sen} x}{\cos^2 x})$$

....

Sea $f(x) = (\text{sen} x)^{\sqrt{x}}$. Tomando logaritmos $\ln f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln \text{sen} x$. Derivando

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \text{sen} x + \sqrt{x} \cdot \frac{\cos x}{\text{sen} x},$$

$$f'(x) = (\text{sen} x)^{\sqrt{x}} \left[\frac{\ln \text{sen} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}\cos x}{\text{sen} x}\right].$$

Sea $g(x) = [\ln(2e^x - 1)]^{\cos x}$. Tomando logaritmos $\ln g(x) = \cos x \cdot \ln[\ln(2e^x - 1)]$.

Derivando $\frac{g'(x)}{g(x)} = -\text{sen} x \cdot \ln[\ln(2e^x - 1)] +$

$$+ \cos x \cdot \frac{1}{\ln(2e^x-1)} \cdot \frac{1}{2e^x - 1} \cdot 2e^x,$$

depejándose a continuación g'.

Derivemos $f_1(x) = x^{\text{sen} x}$, $f_2(x) = (\text{sen} x)^x$, $f_3(x) = \text{sen} x^x$.
$\ln f_1(x) = \text{sen} x \cdot \ln x$, $\ln f_2(x) = x \cdot \ln \text{sen} x$, con lo que $\frac{f'_1(x)}{f_1(x)} = \cos x \cdot \ln x + \text{sen} x \cdot \frac{1}{x}$,

$$\frac{f'_2(x)}{f_2(x)} = \ln \text{sen} x + \frac{x \cdot \cos x}{\text{sen} x}.$$

Para la tercera, pongamos $k(x) = x^x$; será $\ln k(x) = x \cdot \ln x, = \frac{k'(x)}{k(x)} = 1 + \ln x$,

es decir $(x^x)' = x^x + x^x \ln x$. Tendremos

$$f'_1(x) = x^{\text{sen} x} \cdot (\cos x \cdot \ln x + \frac{\text{sen} x}{x})$$

$$f'_2(x) = (\text{sen} x)^x \cdot (\ln \text{sen} x + \frac{x \cos x}{\text{sen} x})$$

$$f'_3(x) = \cos x^x \cdot (x^x + x^x \ln x).$$

....

Para derivar $h(x) = (\text{sen} x)^{[(x^2+3)^{\cos 10^x}]}$ pongamos $j(x) = (x^2+3)^{\cos 10^x}$.
Será $h(x) = (\text{sen} x)^{j(x)}$, $\ln h(x) = j(x) \cdot \ln \text{sen} x$, con lo que bastará hallar $j'(x)$. Como $\ln j(x) = \cos\ (10^x \cdot \ln\ (x^2+3)$, tendremos

$$j'(x) = (x^2+3)^{\cos 10^x}\ [\cos\ 10^x \cdot \frac{2x}{x^2+3} +$$
$$+(-\text{sen}\ 10^x)\ 10^x \ln 10\ \ln\ (x^2+3)]$$

FUNCIÓN	DERIVADA
$f(x) = K$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^k\ (K \in \mathbb{R})$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$
En particular $g(x) = x$	$g'(x) = 1$
$h(x) = \sqrt[m]{x}$	$h'(x) = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$
$k(x) = \sqrt{x}$	$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \text{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\text{sen} x$
$f(x) = \text{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \text{cotg} x$	$f'(x) = \frac{-1}{\text{sen}^2 x}$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \frac{\text{sen} x}{\cos^2 x}$
$f(x) = \text{cosec} x$	$f'(x) = \frac{-\cos x}{\text{sen}^2 x}$

FUNCIÓN	DERIVADA
$f(x) = \text{arcsen} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \text{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
$f(x) = \text{arccotg} x$	$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$
$f(x) = \text{arcsec} x$	$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \text{arccosec} x$	$f'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \text{sh} x$	$f'(x) = \text{ch} x$
$f(x) = \text{ch} x$	$f'(x) = \text{sh} x$
$f(x) = \text{tgh} x$	$f'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$
$f(x) = \text{cotgh} x$	$f'(x) = \frac{-1}{\text{sh}^2 x}$
$f(x) = \text{argsh} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x) = \text{argch} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \text{arctgh} x$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

TEOREMAS SOBRE FUNCIONES DERIVABLES

Si A es un subconjunto del dominio de una función f, se dice que f alcanza en A su *máximo absoluto* en el punto $a \in A$, cuando $f(a)$ es el mayor valor que la función toma cuando la variable recorre A. Es decir, $f(x) \leq f(a)\ \forall\ x \in A$. Análogamente se define el mínimo absoluto. Por ejemplo, 1 es el máximo absoluto de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $\mathbf{R}$, alcazándose en los puntos

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Se dice que f tiene un *máximo relativo* (*o local*) en a, cuando $f(x) < f(a)$ para todos los x de algún entorno de a distintos de a (aunque algunos autores ponen $\leq$). Análogamente se definen los mínimos locales. Este concepto no equivale al anterior (véanse figuras). Sin embargo, es inmediato que el máximo (y el mínimo) que una función continua alcanza en un intervalo (por el Teorema de Weierstrass, D/2), deberá tomarlo en un punto de máximo relativo (respectivamente, mínimo), o bien en los extremos del intervalo. La derivada proporciona información sobre la posición de tales puntos:

Teorema. Si una función f definida en un intervalo (a, b) presenta un máximo o mínimo local en $c \in (a, b)$, donde es derivable, forzosamente $f'(c) = 0$.

La demostración se basa en la observación de que los valores cuyo límite es $f'(c)$ tienen signo opuesto a izquierda y derecha de c.

Los puntos x tales que $f'(x) = 0$ son llamados *puntos singulares* de f. Ello significa que la tangente estará en posición horizontal (fig. 2).

No es cierto el recíproco del teorema anterior, pues no en todo punto singular se alcanza extremo relativo. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ cumple $f'(0) = 0$, con lo que 0 es un punto singular; sin embargo, en cualquier entorno de 0 se obtienen cubos negativos a la izquierda y cubos positivos a la derecha, por lo que en 0 no hay ni máximo ni mínimo local (fig. 3). También se cumple:

Teorema. Si f alcanza un máximo (o mínimo) absoluto en (a, b) en el punto c, en el que es derivable, forzosamente $f'(c) = 0$.

Como consecuencia, el máximo y el mínimo absoluto de una función f continua en $[a, b]$, deberán buscarse en a, en b, en puntos singulares, o allí en donde no haya derivada.

Otros resultados importantes son:

Teorema de Rolle. Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), cumpliéndose $f(a) = f(b)$, forzosamente existe algún $c \in (a, b)$ singular (figs. 4 y 5).

Teorema de Cauchy. Si f y g son derivables en (a, b) y continuas en $[a, b]$, existe algún $c \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(c).$$

Los dos teoremas anteriores permiten llegar al siguiente, muy importante por sus consecuencias:

Teorema del valor medio (o de Lagrange). Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe algún $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corolario. Si $f'(x) = 0$ para todos lo x de un intervalo, f es constante en tal intervalo.

De hecho, en el Cálculo Integral usaremos este resultado bajo la forma siguiente:

Proposición. Si $f'(x) = g'(x)$ para todos los x de un intervalo, existe una constante $C \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$ en tal intervalo.

En las dos proposiciones siguientes se pone de relieve cómo la derivada informa sobre el comportamiento de la función.

Proposición (crecimiento y decrecimiento local). Si $f'(x) > 0$ para todos los x de un intervalo, f es creciente en tal intervalo (análogamente, $f'(x) < 0$ conlleva el decrecimiento).

El crecimiento o la singularidad no siempre bastan para ubicar máximos y mínimos (fig. 6). La siguiente condición, que sí es suficiente, permite abordar numerosos problemas.

Proposición. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a.

Debe observarse que si $f''(a) = 0$, la proposición no decide, pudiendo presentarse un extremo relativo (como así sucede, en $x = 0$, con $f(x) = x^4 + 2$, fig. 8), o bien no haberlo (por ejemplo, en $x = 0$, para $f(x) = x^3$, fig. 3).

- **Ejemplo.** Hallar las zonas de crecimiento y de decrecimiento de la función

$$f(x) = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 120x + 7.$$

Como es

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 - 4x + 120 = \\ = 4(x + 2)(x - 3)(x - 5),$$

tendremos que -2, 3 y 5 son puntos singulares. En $(5, +\infty)$ los tres factores de f' son positivos, por lo que f crece: en $(3, 5)$ los dos primeros son positivos, pero el último es negativo, luego $f'(x) < 0$ en $(3, 5)$, donde f decrecerá. Análogamente se ve que crece en $(-2, 3)$ y decrece en $(-\infty, -2)$.

Puede suceder que f ' delate la presencia «consecutiva» de dos intervalos en que f tenga el mismo sentido de crecimiento, (a, m), (m, b), que algunas veces pueden fundirse en uno sólo, (a, b), tras examen directo de la situación (véase, por ejemplo, el caso f(x) = x3, fig. 3).

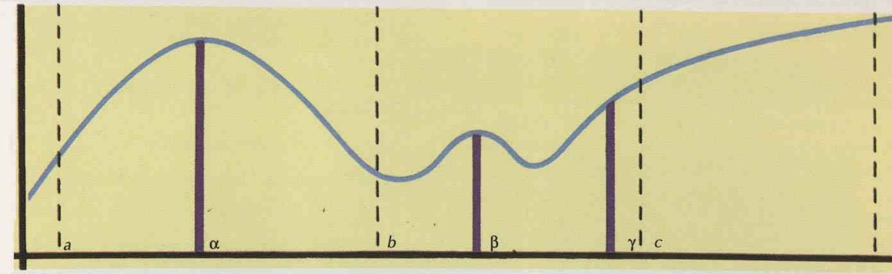
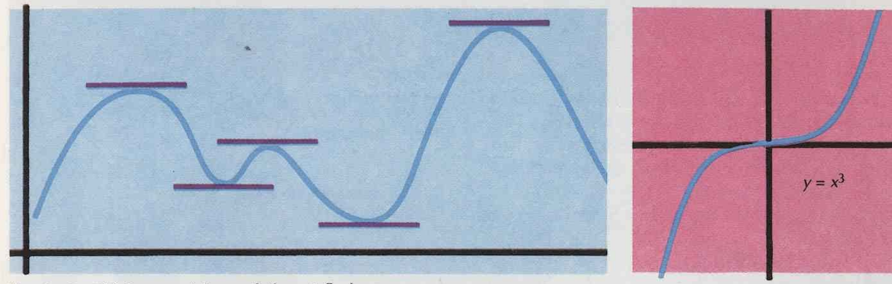
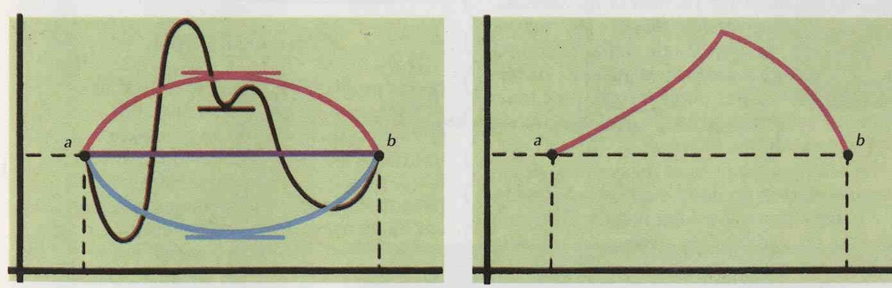


Fig. 1 – En el intervalo $[a, b]$ la función presenta en α un máximo relativo y absoluto. En $[b, c]$ tiene en β un máximo relativo, que no es absoluto. En $[c, b]$ carece de máximo relativo.



Figs. 2 y 3 – Máximos y mínimos relativos. Inflexiones.



Figs. 4 y 5 – El teorema de Rolle (izquierda) asegura la existencia de puntos singulares si la función es derivable. Véase un contra-ejemplo a la derecha.

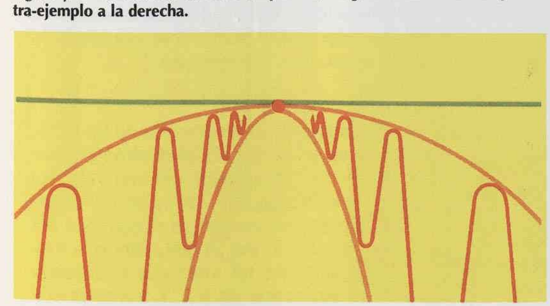


Fig. 6 – La función no es creciente ni tampoco decreciente a ningún lado del máximo relativo.

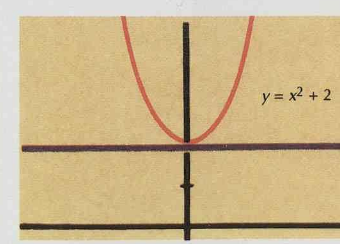


Fig. 7 – La primera derivada se anula para $x = 0$, donde la segunda derivada es positiva, por lo que se presenta un mínimo.

OPTIMIZACIÓN POR MÁXIMOS Y MÍNIMOS

La última proposición de E/5 suele usarse para resolver problemas de optimización: se desea que cierta cosa sea máxima o mínima; si ello puede expresarse mediante una variable, o varias ligadas entre sí, que despejando permitan conducir el problema al de hallar los extremos de una función real de variable real, tenemos ya algún instrumental para intentarlo. Deberá atenderse, sin embargo, no al dominio de la función obtenida, sino a aquél en el que el problema tenga sentido.

- **Ejemplos.** ¿Qué rectángulo de perímetro 20 tiene mayor área? Si x e y son los lados, el área es $A = x \cdot y$, pero como $2x + 2y = 20$, será $y = 10 - - x$, con lo que deberemos hallar el máximo de

$$f(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$

en el dominio $(0, 10)$ (pues no tienen sentido rectángulos de lados negativos o nulos).

Tenemos $f'(x) = 10 - 2x$, presentándose un punto singular en $x = 5$, que es un máximo relativo prque $f''(x) = -2$, $f''(5) = -2 < 0$.

Así pues, la solución es $x = 5 = 5$, es decir, un cuadrado.

....

Un individuo, que va corriendo por la orilla de un canal acuático de 16 metros de anchura, decide llegar a un punto situado 100 metros más adelante, pero en la otra orilla. Si corre a una velocidad de 6 metros por segundo, nada a 2 m/s y empieza por pasar a nado rectilíneamente, ¿a qué punto debe dirigirse para que el tiempo invertido sea mínimo?

La trayectoria a nado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo uno de cuyos lados es 16 m, y el otro, desconocido, x metros. El tiempo invertido en nadar y en correr, son, por ese orden

$$T_n(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 16^2}}{2}, \quad T_c = \frac{y}{6}$$

siendo $x + y = 100$, por lo que el tiempo total es

$$T(x) = \frac{100 - x}{6} + \frac{\sqrt{x^2 + 16^2}}{2},$$

con lo que $T'(x) = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{x}{2\sqrt{x^2 + 16^2}}$ que se anula en $x = 4\sqrt{2}$. Como $T''(4\sqrt{2}) > 0$, se trata de un mínimo relativo. Como además $T(0) \simeq 24{,}6$, $T(100) \simeq 50{,}6$, $T(4\sqrt{2}) \simeq 24{,}18$, es también mínimo absoluto en $[0, 100]$, intervalo fuera del cual nuestro individuo tendría que retroceder, por lo que no hay mejor solución.

....

Se desea construir bidones cilíndricos de volumen dado K, de manera que el total de chapa (área) sea el menor posible. ¿Cómo debe hacerse?

Si el radio de la base del cilindro es r y la altura h, el área es

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

debiendo cumplirse la condición de volumen

$$\pi r^2 h = K$$

por lo que, despejando r y sustituyendo,

$$A(h) = 2\left(\frac{K}{h} + \sqrt{\pi K h}\right)$$

nos da el área en función de h.

$$\text{Derivando } A'(h) = \frac{\sqrt{\pi K h^3} - 2K}{h^2},$$

que se anula cuando lo hace su numerador, es decir, cuando

$$h = \sqrt[3]{4K/\pi}$$

$$\text{Como } A''(h) = \frac{8K - \sqrt{\pi K h^3}}{2h^3},$$

en el punto $h = \sqrt[3]{4K/\pi}$ se tiene

$$A''(\sqrt[3]{4K/\pi}) = 3\pi/4$$

que es positiva, por lo que en $\sqrt[3]{4K/\pi}$ la función $A(h)$ presenta un mínimo relativo, con lo que el problema está resuelto si no se imponen nuevas restricciones, pues hasta aquí la única es $h > 0$, para que el problema tenga sentido.

En la práctica real, sin embargo, por imperativos estéticos, comerciales o industriales, como en nuestro ejemplo podría ser el que se tratara de latas que hubieran de ser abarcadas con la mano, o condiciones de apilado de los bidones, o limitaciones en la cadena de fabricación, puede suceder que el dominio se vea afectado por una restricción, por ejemplo

$$0 < h \leq T$$

donde T acotaría la altura deseada de los bidones. Entonces, si $T \geq \sqrt[3]{4K/\pi}$ el mínimo absoluto coincide con el anterior mínimo relativo, pero si T es menor que tal valor, el punto $\sqrt[3]{4K/\pi}$ carecería de sentido en el contexto del problema, $0 < h \leq T$, por lo que, siendo la función decreciente en tal intervalo, el mínimo absoluto se alcanzaría en $h = T$, como puede apreciarse en la gráfica de la función $A(h)$ de la figura 3.

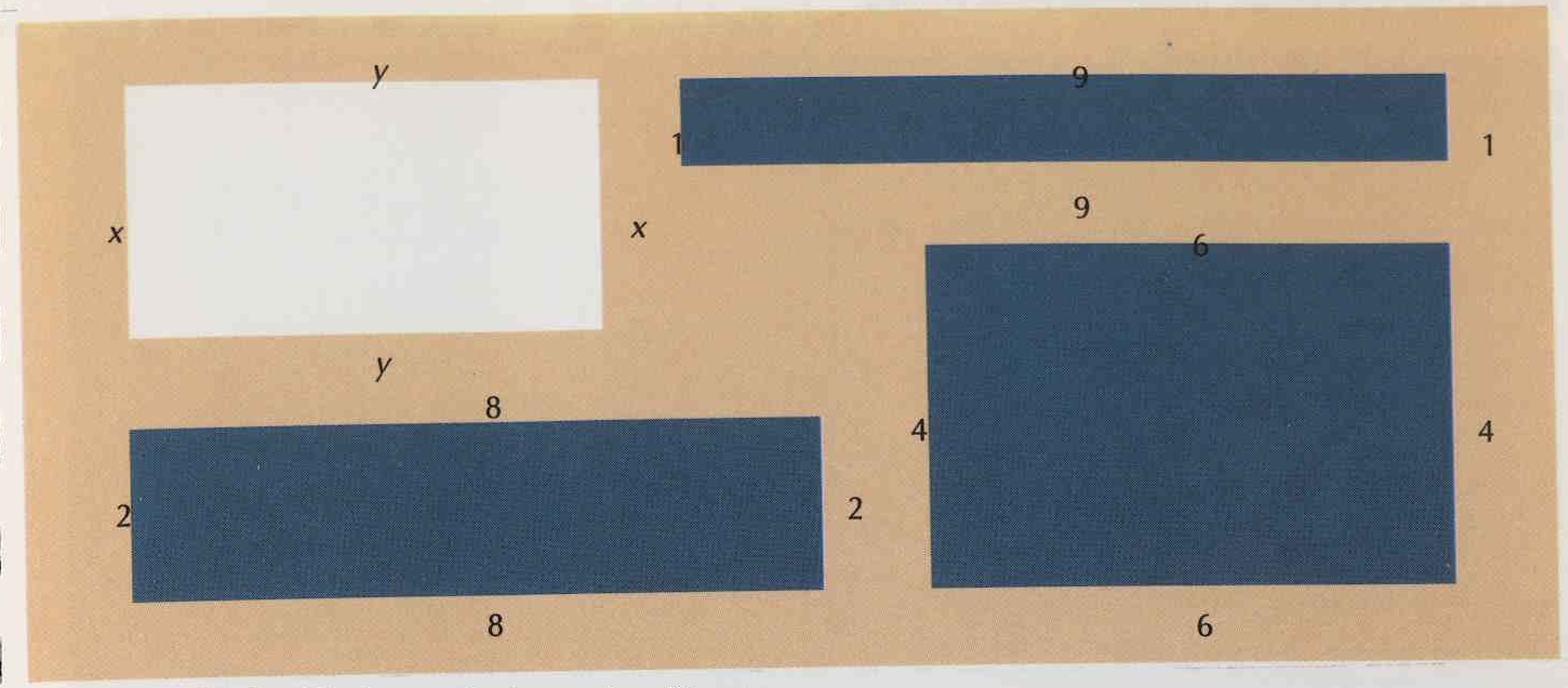


Fig. 1 – Rectángulos del mismo perímetro con área diferente.

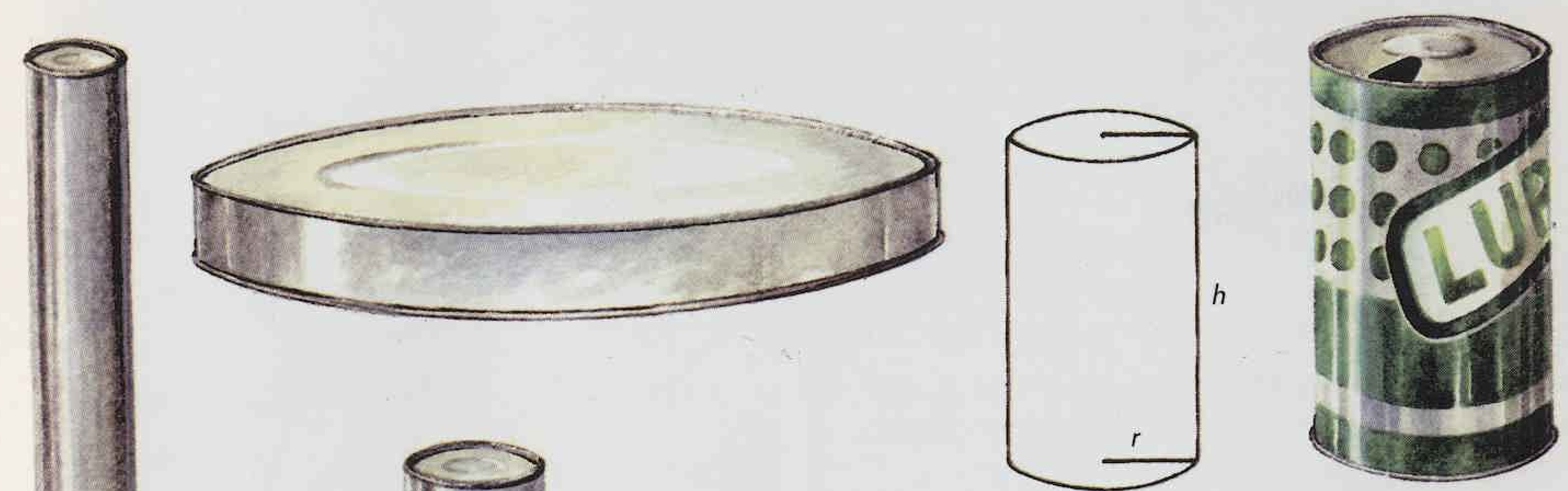
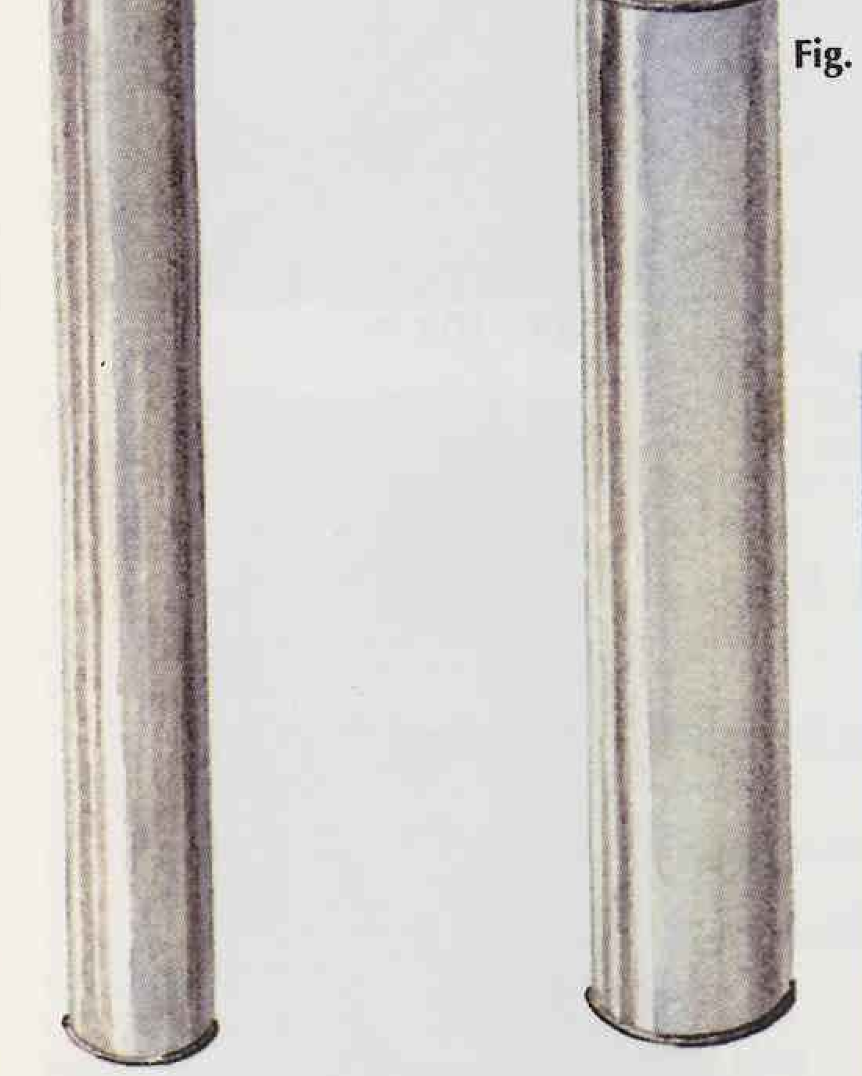



Fig. 2 – Cilindros del mismo volumen con área lateral diferente

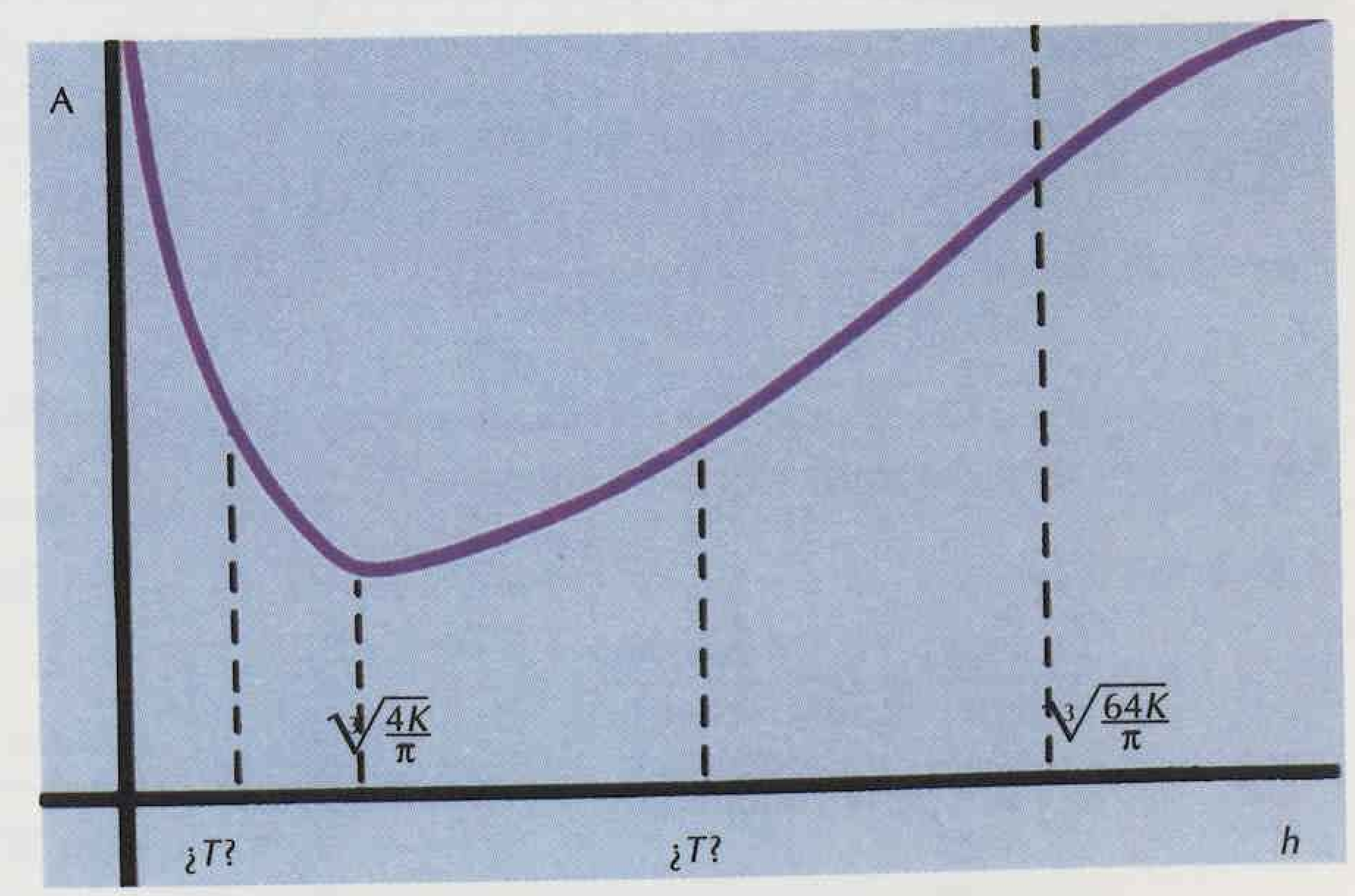


Fig. 3 – Gráfica de la función A(h).

REGLA DE L'HÔPITAL. INDETERMINACIONES

Teorema de L'Hôpital [RH]. Si f y g son derivables en un entorno a, con

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

siendo ambos 0, o ambos infinitos, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre y cuando este segundo límite exista (o sea infinito). El resultado es también cierto si $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, a condición de que existan las derivadas en las semirrectas adecuadas. Si el segundo límite de [RH] es nuevamente indeterminado de la forma 0/0 o ∞/∞ se reitera el procedimiento, si es que se dan las condiciones.

Como veremos a continuación, este teorema resuelve otros muchos casos de indeterminación.

Si $\lim(f - g)$ es ideterminado de la forma $\infty - \infty$, haciendo

$$f - g = \frac{(1/g) - (1/f)}{1/fg}$$

tendremos una ideterminación 0/0 abordable por la Regla de L'Hôpital.

Si $\lim (f \cdot g)$ es indeterminado de la forma $0 \cdot \infty$, haciendo

$$f \cdot g = f/(1/g) \text{ o bien } f \cdot g = g/(1/f)$$

se pasa a las indeterminaciones 0/0 o ∞/∞, escogiéndose la que resulte más cómoda para la aplicación de [RH].

Si $\lim (f^g)$ es indeterminado de alguna de las formas 1^∞, 0^0 o ∞^0, tomando logaritmos

$$\ln \lim (f^g) = \lim \ln(f^g) = \lim (g \cdot \ln f),$$

siendo este último indeterminado de la forma $0 \cdot \infty$ o $\infty \cdot 0$, reconducible a [RH].

• **Ejemplos.**

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\text{sen}x}$ es indeterminado del tipo 0/0.

Aplicando [RH] $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\text{sen}x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1$

....

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \text{sen}x}{\text{cotg}x}$ es indeterminado de la forma ∞/∞.

Aplicando [RH]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \text{sen}x}{\text{cotg}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x/\text{sen}x}{-1/\text{sen}^2 x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \text{sen}x \cos x = 0.$$

....

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{cotg}x} \right)$ es indeterminado de la foma $\infty - \infty$. Aplicando [RH]

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{tg}x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}x - x}{x \cdot \text{tg}x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \text{tg}^2 x - 1}{x + x\text{tg}^2 x + \text{tg}x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\text{tg}x \cdot (1 + \text{tg}^2 x)}{1 + \text{tg}^2 x + x \cdot 2\text{tg}x \cdot (1 + \text{tg}^2 x) + (1 + \text{tg}^2 x)} =$$

$$= \lim \frac{2\text{tg}x}{2 + 2x\text{tg}x} = 0.$$

....

$\lim_{x\to 0} (\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}}$ es indeterminado de la forma 1^∞, su valor fuera A, sería

$$\ln A = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln \cos 4x =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-4\text{sen}4x}{\cos 4x}}{2x} =$$

$$= -2 \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}4x}{x} = -2 \lim_{x\to 0} \frac{4\cos 4x}{1} = -8.$$

Por lo tanto, $A = e^{-8}$

....

$\lim_{x\to 0} x^{\text{tg}x}$ es indeterminado de la forma 0^0. Si su valor fuera B, sería

$$\ln B = \lim_{x\to 0} \text{tg}x \cdot \ln x =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\text{cotg}x} = -\lim_{x\to 0} \frac{2\text{sen}x \cos x}{1} = 0.$$

Por lo tanto, $B = e^0 = 1$.

....

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^x$ es indeterminado de la forma ∞^0. Si su valor fuera M, sería

$$\ln M = \lim_{x\to 0} x \cdot \ln (1/x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1/x)}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{(-x/x^2)}{(-1/x^2)} = 0.$$

tras aplicar [RH] y simplificar. Será $M = e^0 = 1$.

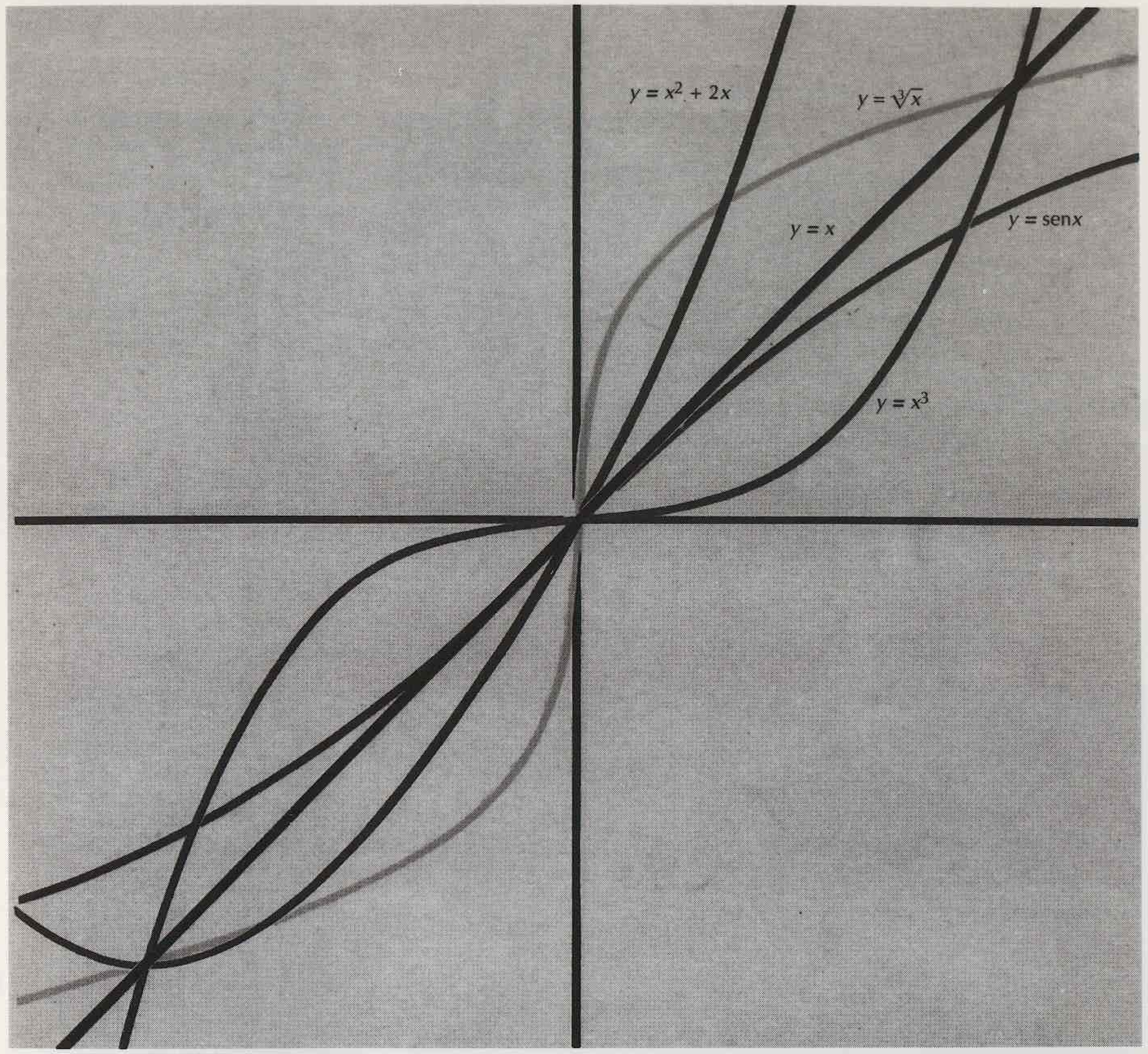


Fig. 1 – La figura recoge diferentes funciones de límite 0 para $x \to 0$. Sin embargo, los límites de sus cocientes toman diferentes valores, midiendo comparativamente la «rapidez» con que se acercan a 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 2x}{x} = 2 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \infty$$

La función $\sqrt[3]{x}$ es la que se acerca más «lentamente» a 0, y x^3 la más «rápida».

Fig. 2 – Guillaume de L´Hôpital (1661-1704).

EQUIVALENCIA DE VARIABLES

Variables equivalentes

Cuando $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ decimos que f y g son *equivalentes para $x\to a$.* Si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = m \neq 0.$$

serán equivalentes f y $m \cdot g$.

Si f y g son equivalentes para $x\to a$, como se tiene $f = (f/g) \cdot g$, tendremos que si f aparece como factor o divisor en una expresión cuyo límite para $x\to a$ queremos hallar, puede ser reemplazada por g sin que se altere el límite, pues estaríamos multiplicando o dividiendo por 1.

Son, por ejemplo, equivalentes, x y sen$x$, para $x\to 0$. Por ello, el siguiente límite, que mediante la Regla de L'Hôpital conllevaría una tediosa derivación, ahora es

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^5 x}{9x^5\cos^3 6x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{9x^5\cos^3 6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{9\cos^3 6x} = \frac{1}{9}.$$

Infinitos e infinitésimos

Si es infinito el límite de $f(x)$ para $x\to a$, donde a es un número real o también $+\infty$, $-\infty$ o ∞, diremos que $f(x)$ es *un infinito para $x\to a$.*

Si f y g son infinitos para $x\to a$, tales que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha,$$

diremos que f es un infinito de *mayor orden* que g cuando α sea infinito, que f tiene *menor orden* que g cuando $\alpha = 0$, y que son infinitos del *mismo orden* cuando α sea finito no nulo.

Si f es un infinito para $x\to +\infty$, $x\to\infty$ o $x\to\infty$, decimos que su orden es mayor, igual o menor que m según resulte de compararlo con x^m. Si f es un infinito para $x\to a$ ($\in \mathbf{R}$), decimos que su orden es mayor, igual o menor que m según resulte de compararlo con $1/(x-a)^m$. Se puede decir, intuitivamente, que el orden mide la rapidez con que f tiende a ∞.

Proposición. Si a un infinito se le suma uno de orden inferior se obtiene un infinito equivalente al primero. La diferencia de dos infinitos equivalentes es otro de orden no inferior, o una función no infinita.

Obsérvese que la suma de dos infinitos del mismo orden tiene resultado indeterminado.

Si $a_p \neq 0$, el polinomio $a_0 + a_1x + \ldots + a_px^p$ es un infinito de orden p, para $x\to\infty$

Proposición. Para $x\to\infty$, son infinitos

$$(\log_a x)^m,\ x^n,\ b^x,\ x^{px}$$

($a, b > 1$; $m, n, p > 0$) llamados *infinito logarítmico, potencial, exponencial* y *potencial-exponencial,* respectivamente, siendo el orden de cada uno inferior al del siguiente, según se han enumerado.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, decimos que f es un *infinitésimo* para $x\to a$. Si f y g son infinitésimos para $x\to a$, cuando

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

sea infinito, cero, o finito no nulo, diremos, respectivamente, que *el orden* del infinitésimo f es menor, mayor o igual que el de g. En particular, diremos que el orden de f es menor, mayor o igual que n según resulte de compararlo con $(x-a)^n$. Por ejemplo, para $x\to 0$, sen$^2 7x$ es un infinitésimo de orden dos, pues

$$\lim_{x\to 0} [(\text{sen}^2 7x)/x^2] = 49.$$

El orden mide la «rapidez» con que f tiende a 0 (véase la figura contigua).

Está claro que si f es un infinito para $x\to a$, $(1/f)$ será un infinitésimo. Así se obtiene:

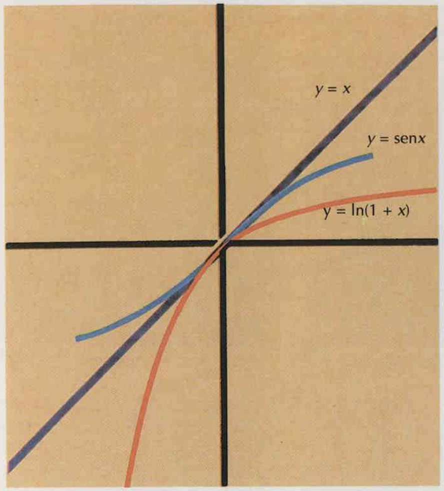
Proposición. Si a un infinitésimo se le suma uno de orden superior, se obtiene un infinitésimo equivalente al primero.

Orden de contacto de dos curvas

Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen $f(a) = g(a)$, con lo que sus gráficas se cortan, la diferencia $\varepsilon(h) = f(a+h) - g(a+h)$ será un infinitésimo cuando $h\to 0$. Tal diferencia no es más que la porción de ordenada comprendida entre las dos gráficas en el punto de abscisa $a + h$ de las cercanías de a. Diremos que las dos curvas tienen en $(a\ f(a))$ un *contacto de orden m* cuando $\varepsilon(h)$ sea un infinitésimo de orden $m + 1$. Se tiene

Proposición. Si las funciones f y g tienen iguales las m primeras derivadas en un punto a en el que $f(a) = g(a)$, siendo finitas pero distintas las de orden $m + 1$, la curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ tienen en $(a, f(a))$ un contacto de orden m.

Obsérvese que si el contacto es de primer orden o más, será $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$, con lo que las curvas tienen en $(a, f(a))$ la misma tangente: se dice que en ese punto son *tangentes entre sí.*



$f(x) = \text{sen}x$	$g(x) = x$	$h(x) = \ln(1+x)$
$f(0) = 0$	$g(0) = 0$	$h(0) = 0$
$f'(0) = 1$	$g'(0) = 1$	$h'(0) = 1$
$f''(0) = 0$	$g''(0) = 0$	$h''(0) = -1$
$f'''(0) = 1$	$g'''(0) = 0$	$h'''(0) = 2$

Fig. 1 – Contacto entre las gráficas de x, sen$x$.y $\ln(1+x)$.

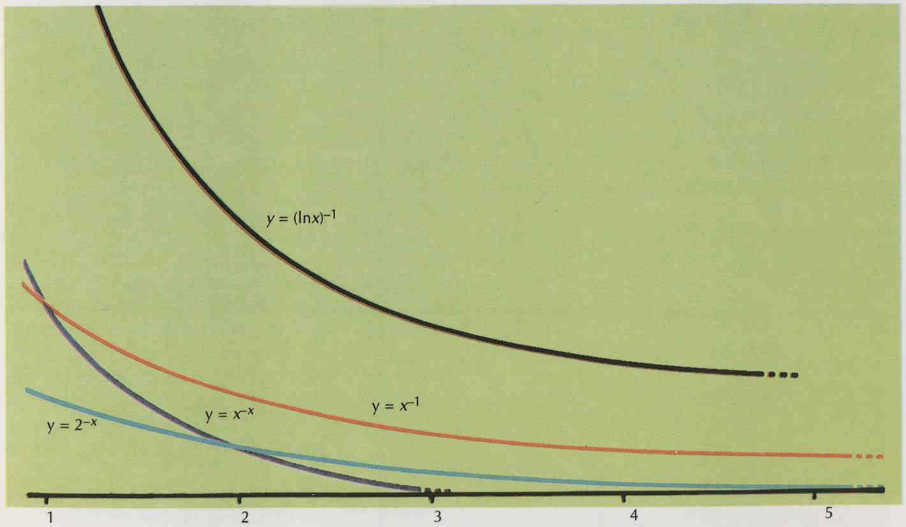


Fig. 2 – Invirtiendo los tipos fundamentales de infinitud para $x\to +\infty$ se obtienen los tipos fundamentales de infinitésimos: $(\ln x)^{-m}$, x^{-p}, a^{-x}, x^{-kx}($a > 1$, p, K, $m > 0$) logarítmico, potencial, exponencial y potencial-exponencial respectivamente cada uno de menor orden que el siguiente.

APROXIMACIÓN POLINÓMICA

Como las funciones polinómicas son las de más fácil manejo, dada una función $f(x)$ es interesante ver si se puede sustituir por una polinómica que sea «aproximadamente igual». Está claro que ello difícilmente va a poder hacerse en todo el dominio de la función con un solo polinomio. La aproximación se hará, pues, con carácter local, es decir, en las cercanías de cierto punto a, ajustando diferentes polinomios a diferentes segmentos de curva. Por otra parte, la idea de aproximación podemos precisarla más: si la función $f(x)$ se reemplaza por un polinomio $p(x)$ en las cercanías de un punto a, lo que se desea es que la diferencia $f(x) - p(x)$ sea un infinitésimo para $x \to a$, y cuanto mayor sea su orden, mejor será la aproximación.

Supongamos un punto a del dominio de f, arbitrario, pero fijo en adelante. Si $p(x) = a_0 + a_1(x - a) + \ldots + a_m(x - a)^m$ es un polinomio, escrito en potencias de $(x - a)$ (lo que es preferible para analizar caracteres infinitesimales), se obtiene fácilmente $a_k = (p^{k}(a))/k!$ derivando k veces $p(x)$. Por consiguiente

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \frac{p''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{p'''(x)}{3!}(x - a)^3 + \ldots + \frac{p^{m)}(a)}{m!}(x - a)^m.$$

En la anterior expresión, que liga los coeficientes del polinomio con sus derivadas, se basa el método de aproximación polinómica de Taylor:

Supongamos que f admite al menos n derivados $f'(a), f''(a), \ldots, f^{n}(a)$ en el punto a. Construimos los polinomios

$$p_0(x) = f(a)$$

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

....

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ldots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

recibiendo $p_m(x)$ el nombre de *m*-ésimo polinomio de Taylor de la función f en el punto a. Desde $k = 0$ hasta $k = n$ tendremos $p_n^{k}(a) = f^{k)}(a)$ por lo que, según se dijo en E/8,

Proposición. La gráfica f y la de su enésimo polinomio de Taylor en a tienen en tal punto un contacto de orden no inferior a n.

También puede enunciarse así:

Proposición. $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - a)^n} = 0.$

Esto significa que, para $x \to a$, la diferencia $f(x) - p_n(x)$ es un infinitésimo de orden superior a n.

La diferencia $f(x) - p_n(x) = R_n(x)$ recibe el nombre de *resto enésimo* (o término complementario). Al reemplazar $f(x)$ por $p_n(x)$, el error cometido será $R_n(x)$, por lo que interesa disponer de expresiones apreciadoras del resto enésimo, de modo que si no se conoce exactamente, se pueda, al menos, acotar, con lo que se podrá calibrar la magnitud del error cometido.

La expresión

$$f(a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ldots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x - a) + R_n(x),$$

recibe el nombre de *fórmula de Taylor* para f en torno al punto a.

Cuando $a = 0$ la fórmula de Taylor se escribirá

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

llamada (innecesariamente) *fórmula de MacLaurin.*

Cuando en un entorno de x se dispone de la derivada f^{n+1} se tiene

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1},$$

forma de Lagrange del término complementario, donde ξ es algún punto entre a y x. Si $f^{n+1)}$ tiene su valor absoluto acotado por M en el intervalo, será

$$|R_n(x)| \le \frac{M|x - a|^{n+1}}{(n + 1)!}$$

expresión que nos permite estimar el error.

Pueden ser también útiles las expresiones

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x - a)^p(x - \xi)^{n+1-p}$$

(forma de Schlömilch, con $0 < p < n + 1$), que para $p = 1$ es la forma de Cauchy

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{n!}(x - a)(x - \xi)^n.$$


Fig. 1 – Brook Taylor (1685-1731).

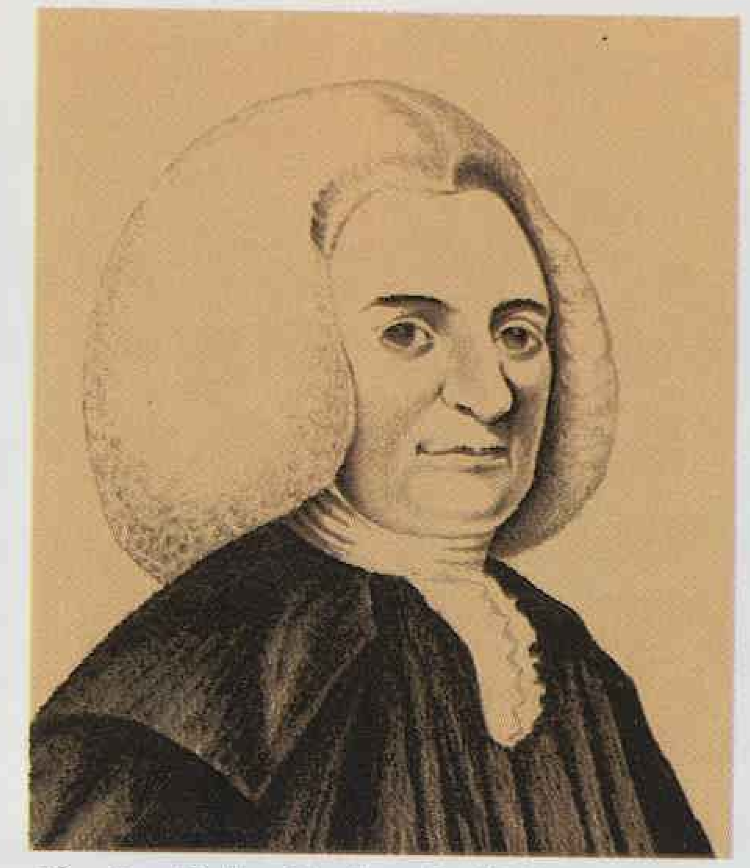


Fig. 2 – Colin MacLaurin (1698-1746).

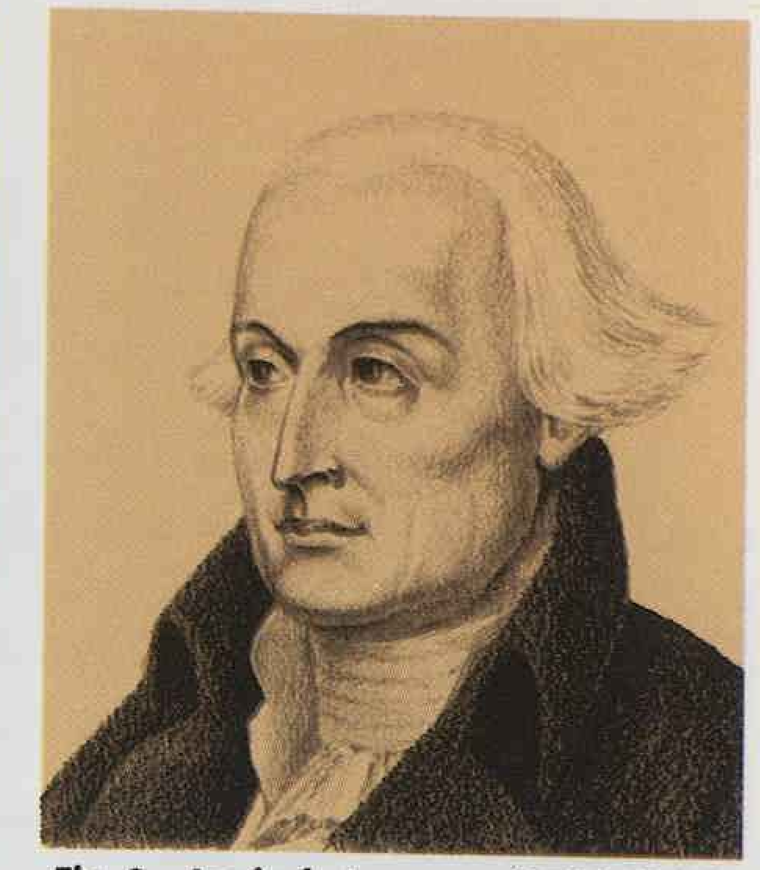


Fig. 3 – Louis de Lagrange (1736-1813).

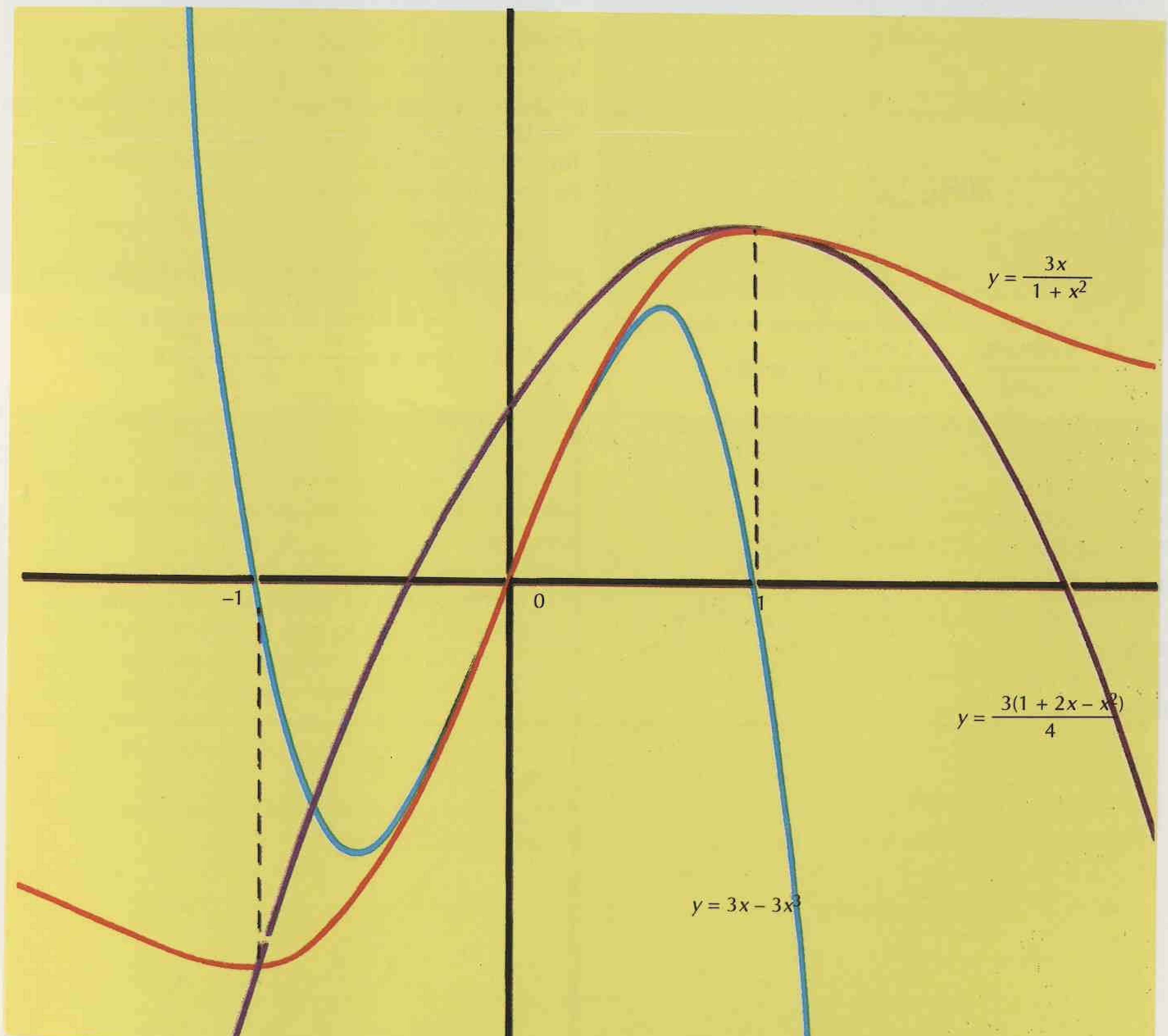


Fig. 4 – La aproximación polinómica es de carácter local; es decir, sólo en un entorno. En la figura se ve la gráfica de una función, un polinomio que la aproxima en las cercanías de $x = 1$ (y sólo ahí) y otro polinomio que lo hace en torno a $x = 0$.

Desarrollo de la función exponencial. Si $f(x) = e^x$, se tinen $f^{n)}(x) = e^x$, con lo que $f^{n)}(0) = 1$, $\forall\ n \in N$, luego el desarrollo de MacLaurin es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}.$$

Si para calcular $e^{0,12}$ tomamos el segundo polinomio, se obtiene el valor

$$e^{0,12} \simeq 1 + 0,12 + (0,12)^2/2 = 1,1272$$

Como el tercer término complementario es $R_2(x) = x^3\ e^x\ 6$, teniendo en cuenta que $e^{\theta x} < e^{0,12} < 2$, una acotación posible será

$$|R_2(x)| < (0,12)^3\ 2/6 = 0,000576.$$

Desarrollo de las funciones circulares. Las derivadas sucesivas de $g(x) = \text{sen}x$ cumplen

$$g^{2n)}(0) = 0,\ g^{2n+1)}(0) = (-1)^n,$$

obteniéndose el desarrollo

$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\text{sen}\theta x$$

Análogamente

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots +$$

$$+ \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}\text{sen}\theta x.$$

Si, por ejemplo, quisiéramos calcular cos 89°, que es cos $[(\pi/2) - (\pi/180)]$ desarrollaríamos $\cos x$ en torno a $\pi/2$. Veríamos entonces que basta llegar al grado 3 para que el error sea menor que una millonésima.

Desarrollo de la función potencial. Si $h(x) = x^k$ y k no es un número natural, no puede hacerse el desarrollo de MacLaurin. Desarrollaremos $f(x) = 1 + x^k$ que sí es indefinidamente derivable en el origen, teniéndose

$$f^{n)}(x) = k(k-1)\cdot\dots\cdot(k-n+1)(1+x)^{k-n},$$

con lo que $f^{n)}(0) = k(k-1)\cdot\dots\cdot(k-n+1)$,

y el desarrollo será, con $\theta \in (0, 1)$,

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{k(k-1)\cdot\dots\cdot(k-n+1)}{n!}x^n +$$

$$+ \frac{k(k-1)\cdot\dots\cdot(k-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{k-n+1}\cdot x^{n+1}$$

Si calculamos $\sqrt[3]{1,21}$ a través de este desarrollo hasta el grado 2, tomaremos

$$(1+0,21)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}0,21 + \frac{-2}{18}(0,21)^2 = 1,0651.$$

Podemos acotar el error mediante

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)}{6}\cdot(1,21)^{-2/3}\cdot(0,21) < 0,000576$$

que corresponde al valor $\theta = 1$, el «peor posible», por lo que la inexactitud de $\sqrt[3]{1,21} \simeq 1,0651$ no llega a 6 diezmilésimas.

Desarrollo de la función logarítmica. Como el logaritmo y sus derivadas no están definidos para $x = 0$, no puede hacerse el desarrollo de MacLaurin. En vez de tomar el desarrollo de Taylor en $x = 1$, es preferible tomar el desarrollo de MacLaurin de $\ln(1 + x)$. Se tiene

$$(\ln(1+x))^{n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\cdot(1+x)^{-n},$$

por lo que la deriva a enésima en el origen es $(-1)^{n-1}(n-1)!$, y el desarrollo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{(1+\theta)^{n+1}}\cdot x^{n+1}$$

donde $\theta \in (0, 1)$. Pueden verse en la lámina adjunta las gráficas de varias aproximaciones sucesivas.

Para calcular ln 1,1 con un error menor que una dizmilésima, al tomar $x = 0,1$ será $1 < (1 + \theta x) < 1,1$, con lo que $[1/(1 + \theta x)] < 1$ y el resto enésimo quedará acotado por $[1/(n + 1)10^{n+1}]$ en valor absoluto. Habrá de ser

$$\frac{1}{n+1}\frac{1}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^4} \quad \text{o sea } 10^4 < (n+1)10^{n+1}$$

desigualdad que ya se satisface para $n = 3$, por lo que bastará tomar

$$\ln 1,1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} = 0,0050.$$

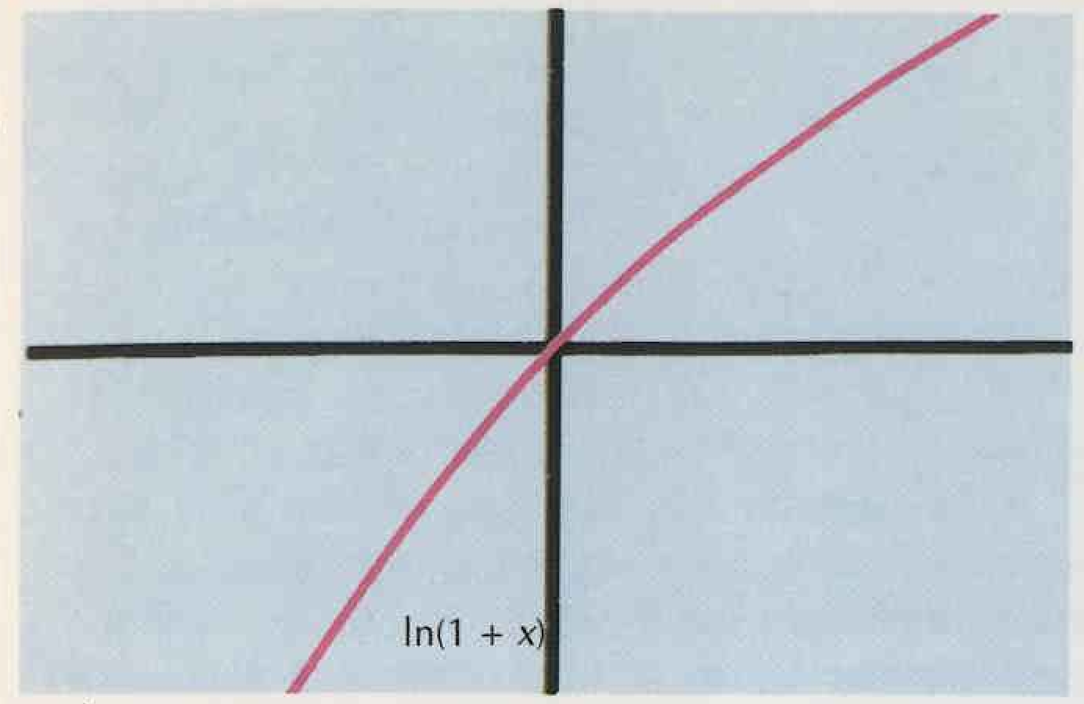


Fig. 1 – Función ln(1 + x)

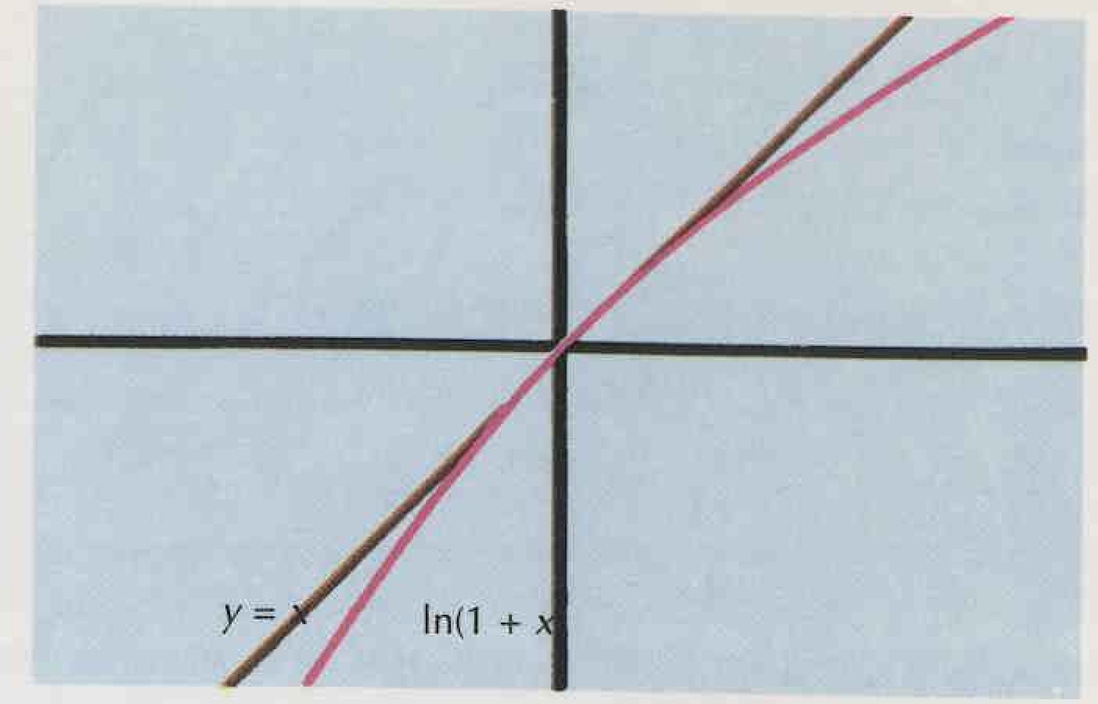


Fig. 2 – ln(1 + x) aproximado (en torno a 0) por x.

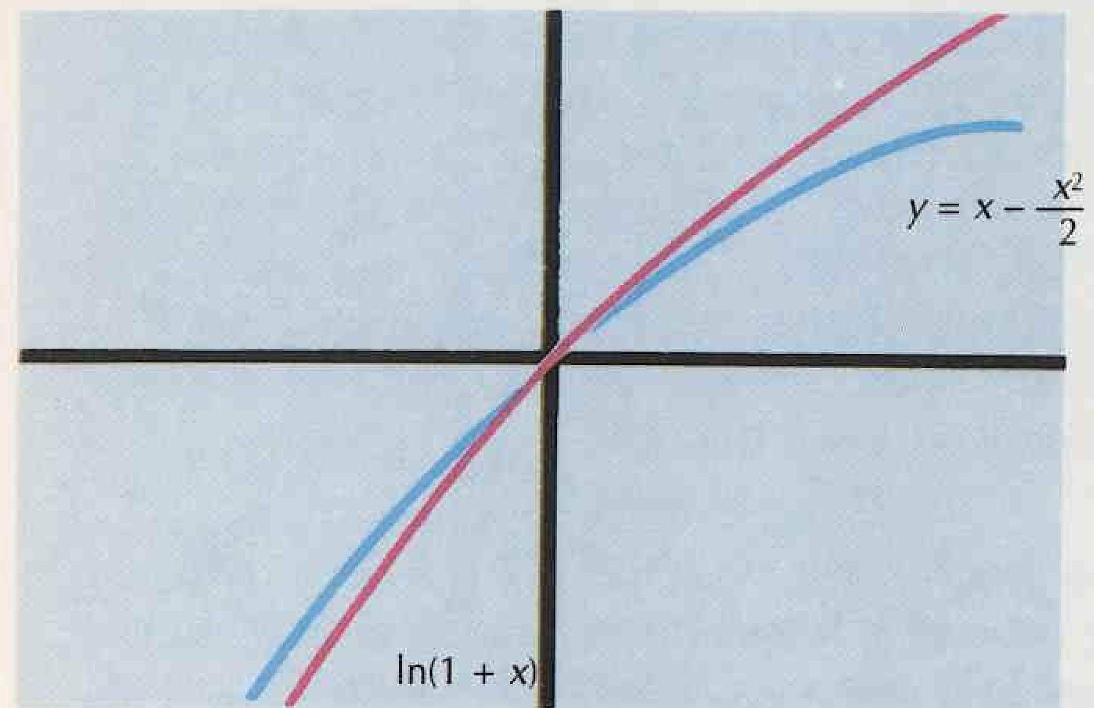


Fig. 3 – ln(1 + x) aproximado (en torno a 0) por $x - \frac{x^2}{2}$.

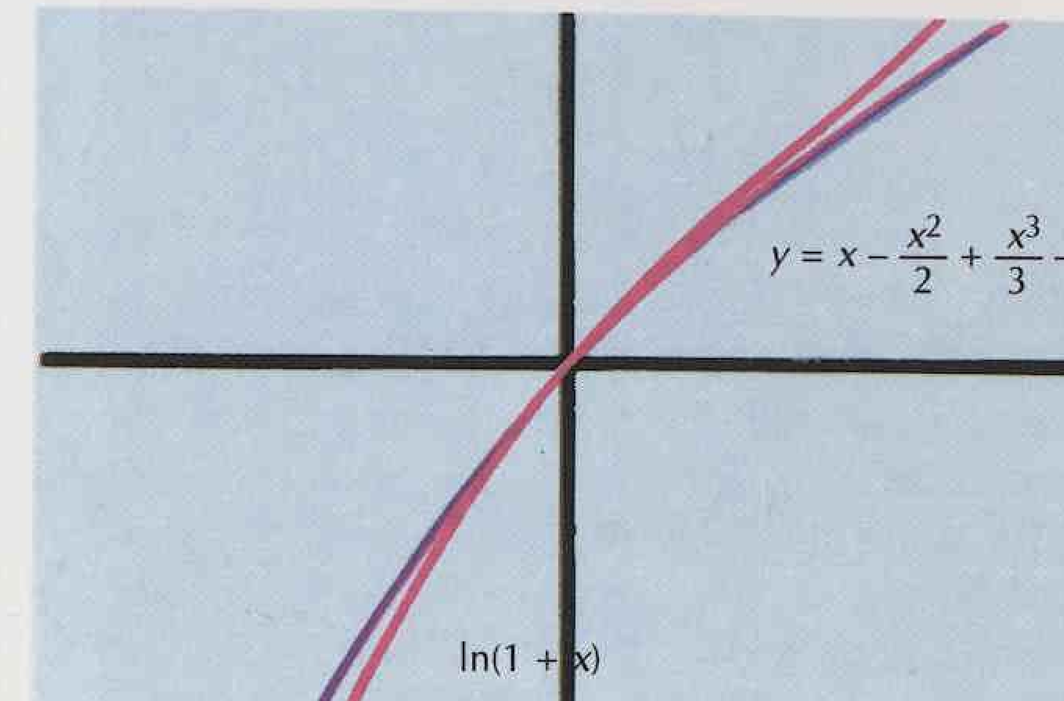


Fig. 4 – ln(1 + x) aproximado (entorno a 0) por $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

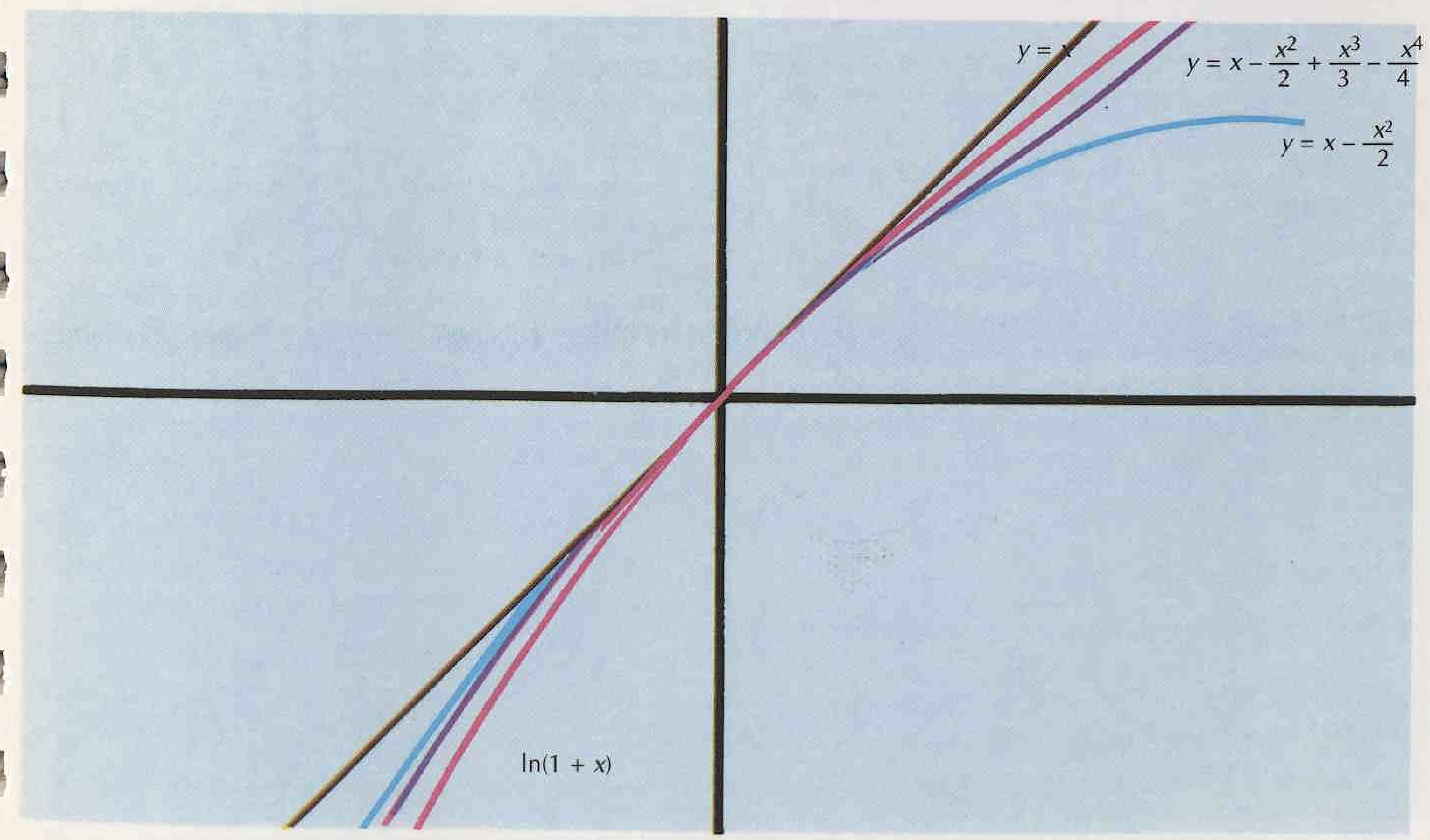


Fig. 5 – Comparación de las aproximaciones.

ESTUDIO LOCAL DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES

Supondremos en adelante que las funciones genéricas que aparezcan poseen tantas derivadas como convenga a la exposición.

Posición con respecto a la tangente

Puesto que la ecuación $y = g(x)$ de la recta tangente en un punto de abscisa a, a la curva $y = f(x)$ es

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

al sustraer del desarrollo de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots$$

obtenemos

$$f(x) - g(x) = \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ldots,$$

expresión cuyo significado, en las cercanías de a, es *la ordenada de la función menos la ordenada de la tangente*, y según que sea positiva o negativa, que la curva esté por encima o por debajo de la tangente, respectivamente. Sabemos que si a un infinitésimo se le suma otro de orden superior, se obtiene un infinitésimo equivalente al primero (E/8). Al ser $(x - a)^n$ un infinitésimo de orden n para $x \to a$, el signo de $f(x) - g(x)$ dependerá tan sólo del signo de la primera derivada, empezando con la segunda, que sea no nula en a.

Proposición. Si, empezando por la segunda derivada, la primera que no es nula en a es $f^{n)}(a)$, se dan los casos

I. n par y $f^{n)}(a) < 0$. La función está por debajo de la tangente, con la concavidad dirigida hacia las y negativas (fig. 1).

II. n par y $f^{n)}(a) > 0$. La función está por encima de la tangente, con la concavidad hacia las y positivas (fig. 1).

III. n impar. La función atraviesa la tangente (fig. 1). En este caso se dice que la función tiene en el punto $(a, f(a))$ *un punto de inflexión* (o, sencillamente, una *inflexión*).

Máximos y mínimos relativos

Ya sabemos (E/5) que para que una función alcance en a un extremo relativo, es imprescindible que $f'(a) = 0$, pero que ello no basta. Pero ahora podemos precisar la posición con respecto a la tangente:

Proposición. Condición necesaria y suficiente para que una función $f(x)$ con derivadas sucesivas alcance en a un máximo relativo es que la primera derivada no nula en a sea de orden par y de valor negativo. La condición para un mínimo relativo es que la primera derivada no nula sea de orden par y positiva.

Por lo tanto, para hallar máximos y mínimos relativos de $y = f(x)$, habremos de buscar los puntos singulares, es decir, resolver la ecuación $f(x) = 0$ examinando después el valor de las sucesivas derivadas en tales puntos.

Para hallar las inflexiones de la curva $y = f(x)$, resolveremos la ecuación $f''(x) = 0$, examinando las siguientes derivadas en los puntos solución.

• **Ejemplos.** La función $f(x) = -(x - 3)^4$ tiene derivada $f'(x) = -4(x - 3)^3$, nula solamente en $x = 3$. Siendo $f^{II}(x) = -12(x - 3)^2, f^{III}(x) = -24(x - 3)$, $f^{IV}(x) = -24$, tendremos $f(3) = 0$, $f^{I}(3) = 0$, $f^{II}(3) = 0$, $f^{IV}(3) = 24$ y en $x = 3$ se presenta un máximo relativo. No hay inflexiones porque el único punto en que $f^{II}(x)$ es nula es precisamente en $x = 3$ (fig. 2).

....

La función $g(x) = (1/5)x^5 + x - 2$ tiene derivada $g'(x) = x^4 + 1$, que no es nula en ningún punto, por lo que la curva carece de máximos y mínimos locales. Su segunda derivada es $g''(x) = 4x^3$, nula para $x = 0$. Como $g'''(x) = 12x^2$, $g^{IV}(x) = 24x$, $g^{V} = 24$, se tiene

$$g^{II}(0) = 0,\ g^{III}(0) = 0,\ g^{IV}(0) = 0,\ g^{V}(0) = 24,$$

por lo que la función presentará en $x = 0$ su única inflexión (fig. 3).

....

La función $h(x) = (x + 1)^4$ tiene derivada $h'(x) = 4(x + 1)^3$, nula en $x = -1$, siendo

$$h^{II}(-1) = 0,\ h^{III}(-1) = 0,\ h^{IV}(-1) = 24 > 0$$

por lo que, en $x = -1$, $h(x)$ alcanza un mínimo relativo (fig. 2), careciendo de inflexiones pues $h^{II}(x) = 12(x + 1)^4$, nula sólo en $x = -1$.

....

La función $j(x) = (1/4)x^4 + x$ tiene derivada $j'(x) = x^3 + 1$, nula tan sólo en $x = -1$, siendo $j''(x) = 3x^2$, $j''(-1) = 3 > 0$, por lo que en $x = -1$ se presenta un mínimo relativo. Por otra parte, la derivada segunda es nula en $x = 0$. Como

$$j^{II}(0) = 0,\ j^{III}(0) = 0,\ j^{IV}(0) = 6$$

en $x = 0$ la función es cóncava hacia las y positivas (fig. 3), careciendo de puntos de inflexión.

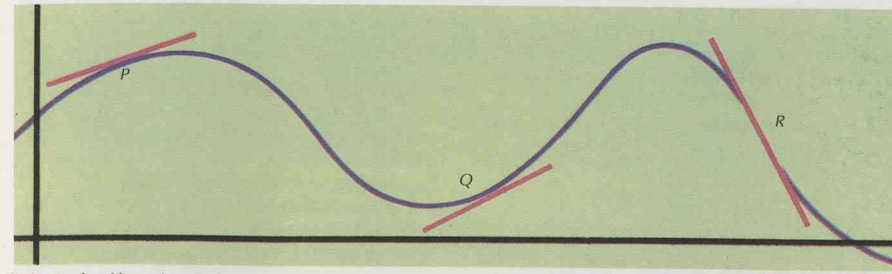


Fig. 1 – La función está en *P* cóncava hacia las *y* negativas, en *Q* cóncava hacia las *y* positivas y tiene una inflexión en *R*.

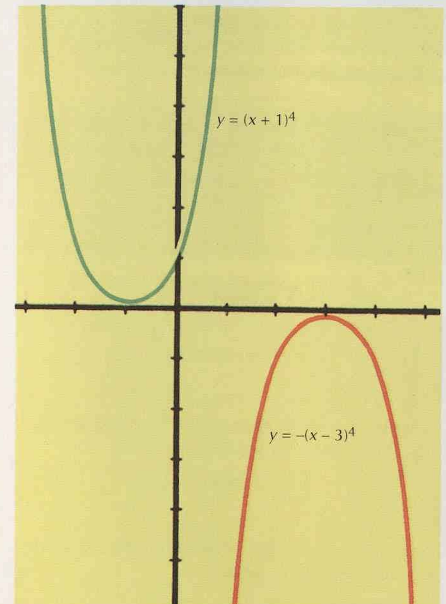


Fig. 2 – Concavidades sin inflexión.

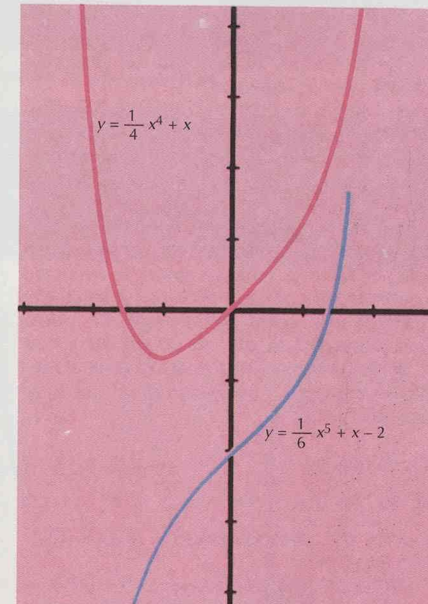


Fig. 3 – Abajo: cambio de concavidad (inflexión).

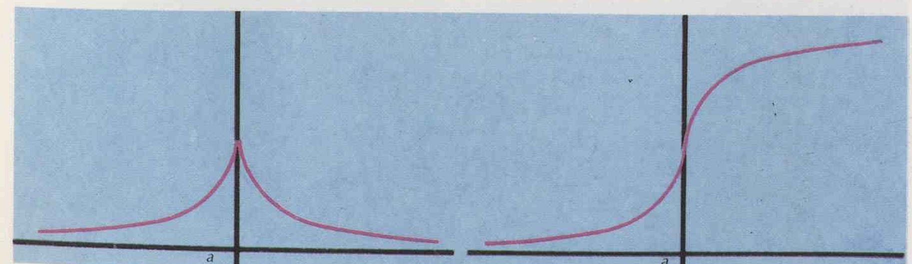


Fig. 4 – Para $x = a$ estas dos funciones carecen de derivada finita, por lo que acudimos a la representación para hablar de inflexiones.

DIRECCIONES ASINTÓTICAS. ASÍNTOTAS

Para cada valor de $m \in \mathbf{R}$ podemos considerar la familia de rectas $y = mx + k$ (k cualquiera). Se trata de la familia de paralelas de pendiente m, todas ellas *en la misma dirección.*
Si tenemos una curva de manera que resulta ser que cuando (x, y) pertenece a ella, se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = m \; (m \in \mathbf{R}),$$

ello significará, intuitivamente, que la curva se aleja hacia la derecha ($x \to +\infty$) en la misma dirección que las rectas $y = mx + k$. En esta situación se dice que la dirección de pendiente m es una *dirección asintótica* de la curva (por la derecha). Reemplazando $x \to +\infty$ por $x \to -\infty$ tendremos el concepto de dirección asintótica por la izquierda.
Puede además suceder que, al alejarse indefinidamente, la distancia de los puntos de la curva a una recta tiende a cero: diremos que tal recta es una asíntota de la curva. Puede pensarse la situación imaginando que la curva, al alejarse hacia el infinito, tiende a confundirse con una recta. Por supuesto, si una curva tiene a una recta por asíntota, también tendrá la dirección asintótica que corresponde a dicha recta. Sin embargo, una curva puede tener la misma dirección asintótica que una familia de paralelas, pero no tener a ninguna de ellas como asíntota. Veamos antes cómo se formalizan estas nociones.

Proposición. Si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ ($m \in \mathbf{R}$), y además $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = n$ ($n \in \mathbf{R}$) la recta $y = mx + n$ es una asíntota por la derecha de la curva $y = f(x)$.
La misma proposición caracteriza a las asíntotas por la izquierda sin más que tomar ambos límites con $x \to -\infty$.
Obsérvese que pueden darse los siguientes casos:
a) m no existe. No hay dirección asintótica.
b) Existen m y n, ambos números reales. Hay asíntota. Se dice que la curva se aleja *hiperbólicamente.*
c) Existe $m \in \mathbf{R}$ y n es $+\infty$ o $-\infty$. Diremos que la curva se aleja *parabólicamente.* No hay asíntota, pero sí dirección asintótica.
d) Existe $m \in \mathbf{R}$ pero no existe n (ni finito ni infinito). La curva se aleja en la dirección asintótica, pero ni hiperbólicamente ni parabólicamente (sin asíntota, desde luego).
En el caso particular en que $m = 0$ y $n \in \mathbf{R}$, tendremos una asíntota horizontal. Este caso puede ser directamente reconocido por la condición única, de que $n = \displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ exista y sea finito.
Si $a \in \mathbf{R}$ y se tiene $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$. $-\infty$ o ∞ decimos que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$. Este concepto puede ampliarse considerando límites laterales $x \to a^+$ y $x \to a^-$.
Es usual llamar asíntotas *oblicuas* a las que no son ni horizontales ni verticales.
• **Ejemplos.** La curva $y = \operatorname{sen} x$ (fig. 2) tiene la dirección asintótica del eje $y = 0$, pues

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

(derecha e izquierda), pero como el límite de $\operatorname{sen} x$ para $x \to \infty$ no existe, no se aleja hiperbólicamente ni parabólicamente.

....

La curva $y = (x \operatorname{sen} x)/4$ se aleja infinitamente, pero sin dirección asintótica, pues no existe $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$ (fig. 3).

....

La curva $y = \sqrt{x} + \operatorname{sen}(\pi/x) + \pi x$ se aleja parabólicamente en la dirección de $y = \pi x$ (fig. 4) pues

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \operatorname{sen}(\pi/x) + \pi x}{x} = \pi$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} + \operatorname{sen}(\pi/x)) = +\infty.$$

....

La curva $y = \operatorname{sen}(\pi/x)$ se aleja hiperbólicamente (fig. 1) con asíntota $y = 0$ pues

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen}(\pi/x) = 0$$

....

En la figura 5 pueden verse difirentes casos de asíntotas verticales. Sean

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{x-2}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & \text{si } x > 4 \\[2mm] \dfrac{1}{x-5} & \text{si } x \le 4 \end{cases}$$

Se tiene

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2_+} \frac{1}{x-2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 2_-} \frac{1}{x-2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 4_-} \frac{1}{x-5} = -1, \quad \lim_{x \to 4_+} \frac{1}{x-4} = +\infty$$

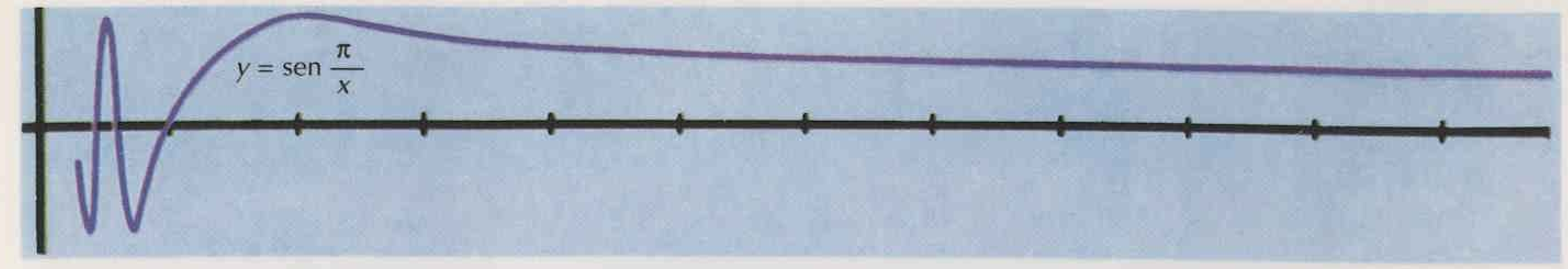


Fig. 1 – Alejamiento hiperbólico por la derecha, con asíntota $y = 0$.

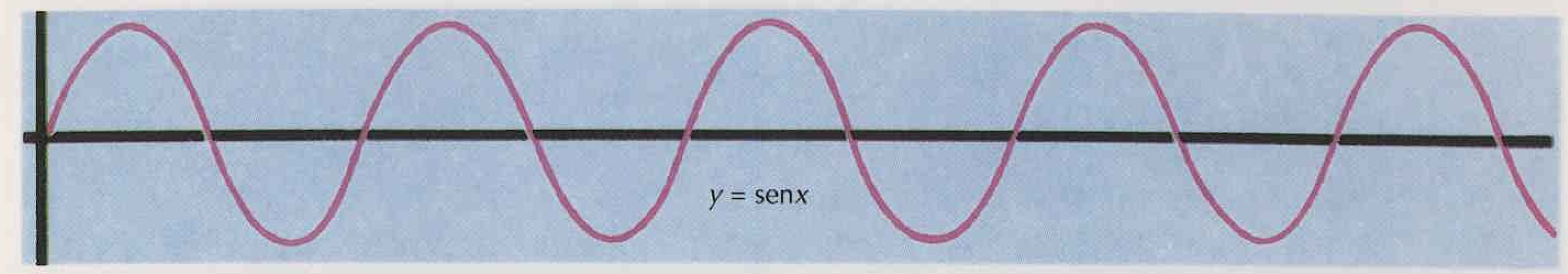


Fig. 2 – Alejamiento no hiperbólico y no parabólico, pero con dirección asintótica según el eje.

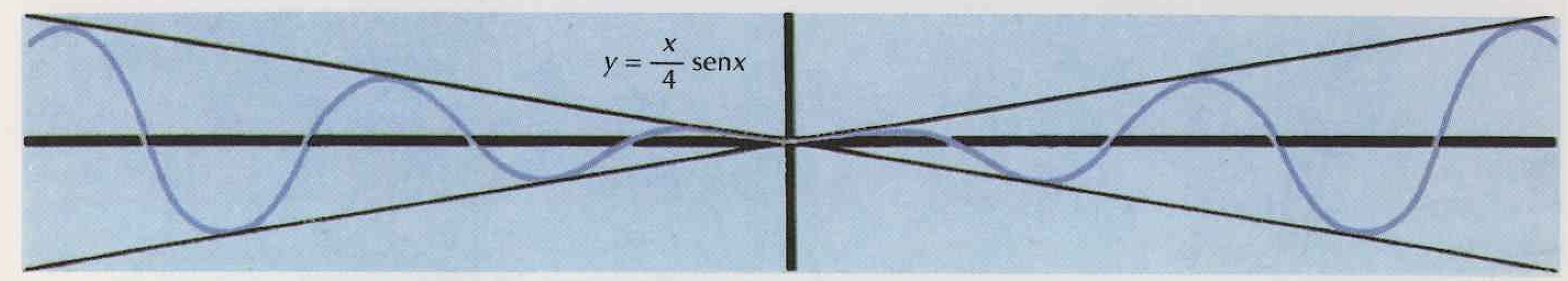


Fig. 3 – Ausencia de dirección asintótica.

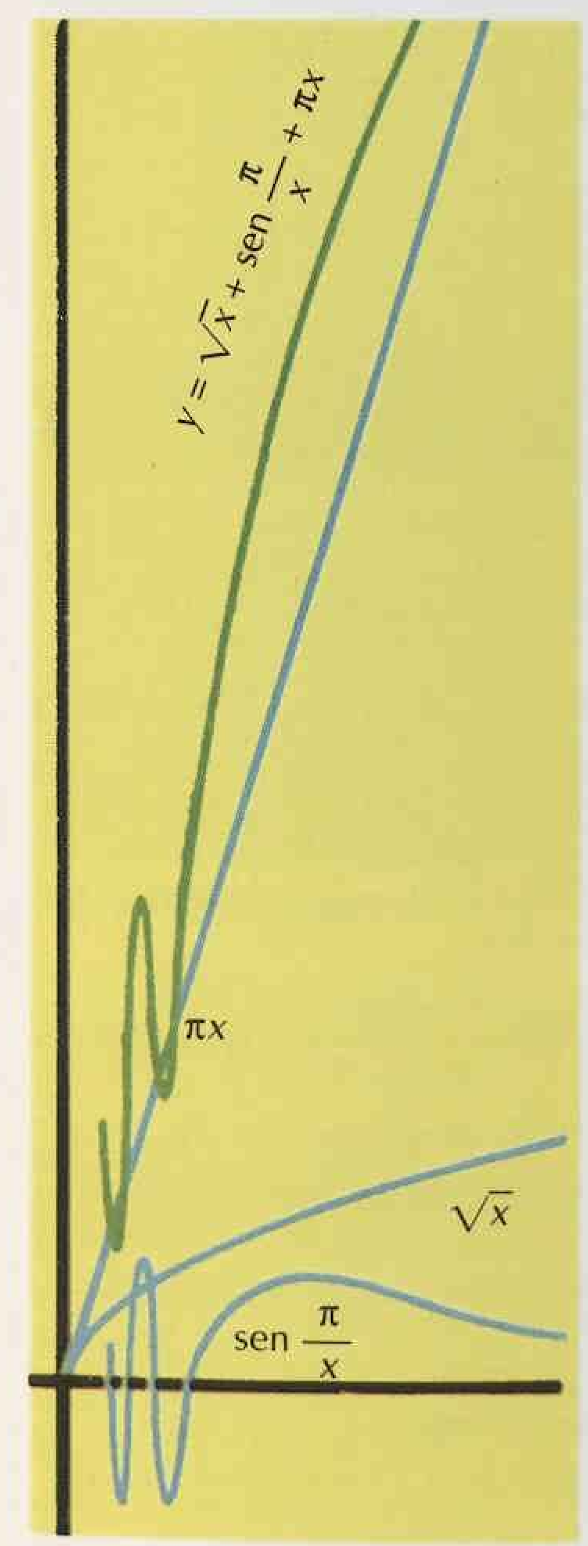


Fig. 4 – Alejamiento parabólico (curva verde)

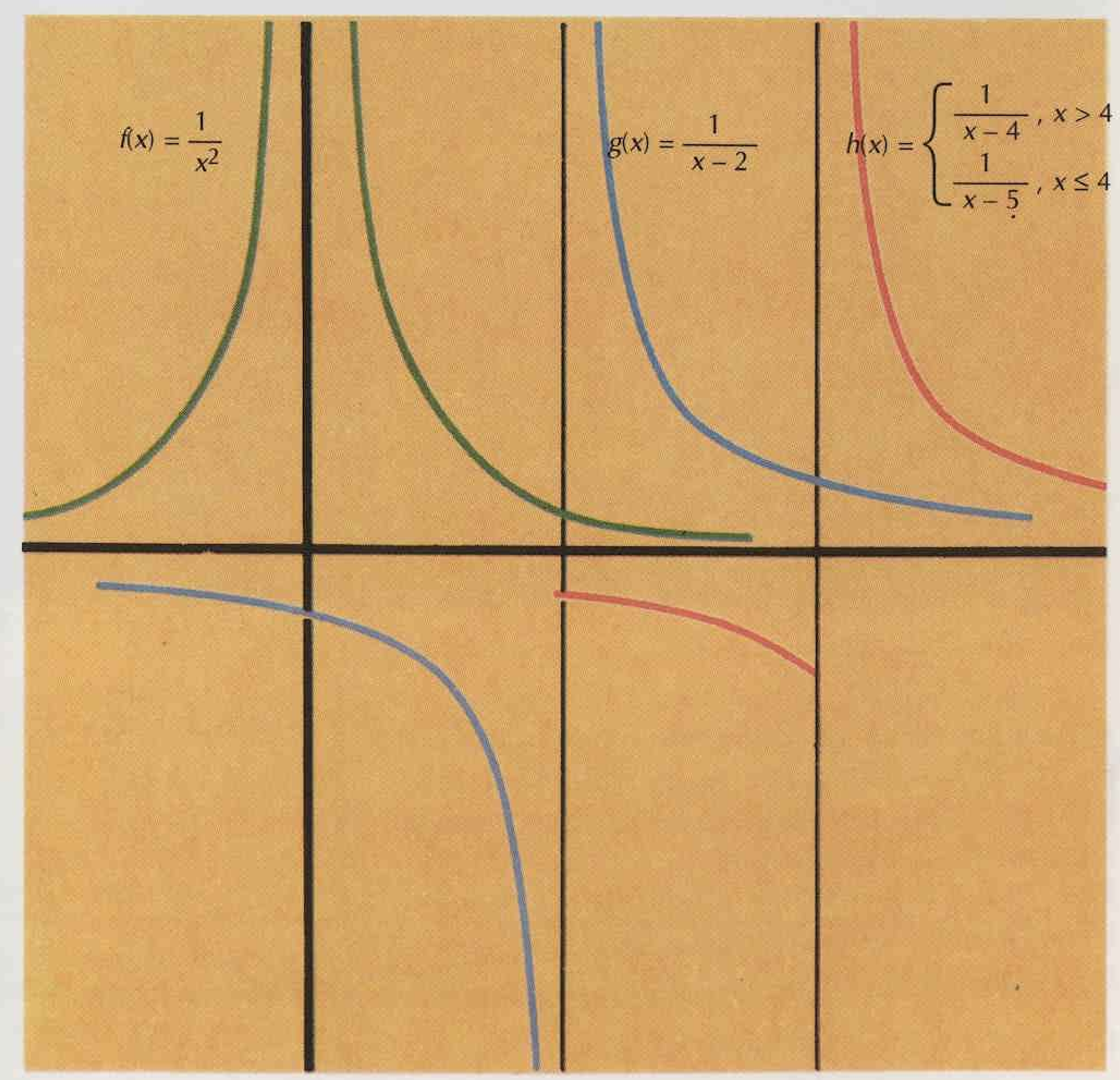


Fig. 5 – Varias asíntotas verticales.

TRAZADO DE LA GRÁFICA DE LAS FUNCIONES

Para proceder a representar gráficamente una función, conviene resolver los puntos que a continuación se exponen:

— Dominio de la función.

— Posibles simetrías elementales. Si $f(x) = f(-x)$ $\forall\, x \in \mathbf{R}$, la gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas, si $f(-x) = -f(x)$ $\forall\, x \in \mathbf{R}$, simétrica respecto al origen.

— Zonas de crecimiento y de decrecimiento.

— Concavidades.

— Máximos, mínimos y puntos de inflexión.

— Comportamiento asintótico.

— Construcción de algún punto de la gráfica. En particular, es usual hallar los valores de x que dan una y nula, y qué valor de y se obtiene para $x = 0$ (intersección con los ejes).

Para trazar la gráfica, se representan las asíntotas, máximos, mínimos, inflexiones y puntos conocidos, atendiéndose, finalmente, a las instrucciones sobre concavidades, crecimiento y decrecimiento.

• **Ejemplos.** Representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}.$$

El domino de la función es R – {2}, en todo el cual es continua. Su derivada, que existe en todo el dominio, es

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2\,(x-4)}{(x-2)^3},$$

y podemos esquematizar su signo mediante

	1		2		4	
signo	0		∄		0	
f'	+	+		−		+

siendo $f''(x) = \dfrac{6(x-1)}{(x-2)^4}$, cuyo signo es

	1		2	
signo	0		∄	
f''	−	+		+

por lo que en (4, 27/4) tendremos un mínimo y en (1, 0) una inflexión (la derivada segunda pasa, sin dejar de existir, de negativa a positiva, cambiando la concavidad.

Puesto que si x tiende a un número la función tiene límite finito, salvo quizás para $x \to 2$, debemos hacer ese límite, siendo $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ por lo que $x = 2$ es asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2} = \infty$ no hay asíntotas horizontales. Sin embargo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x-2)^2} = 1,\ \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2} - x = 1,$$

por lo que $y = x + 1$ es asíntota oblicua por ambos lados. La gráfica se ve en la figura 1.

....

Al representar $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 8}{2x^2 + 8}$

se observa en primer lugar que el dominio es todo **R**, pues todas las operaciones indicadas pueden hacerse para cualquier valor real de x. La derivada primera es

$$g'(x) = \frac{x^4 + 12x^2}{2(x^2+84)^{2'}}$$

positiva salvo en $x = 0$, donde se anula, por lo que g es siempre creciente. Como

$$g''(x) = \frac{-3x(x^2-16)}{(x^2+4)^3},$$

el signo de g'' sigue el esquema

	−4		0		4	
signo	0		0		0	
g''	+	−		+		−

con inflexiones (4, 0,6), (0, –1) y (–4, –2,6). Carece de asíntotas verticales y como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 8}{x(2x^2+8)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 8}{2x^2 + 8} - \frac{x}{2} = -1$$

la recta $y = \dfrac{x}{2} - 1$ es asíntota oblicua por ambos lados. Puede verse la gráfica en la fig. 2.

....

Representemos gráficamente $h(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^2$.

El dominio de h es R – {–3}. Su derivada primera es $h'(x) = \dfrac{4(x+1)}{(x+3)^3}$, de signo positivo en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$, negativo en $(-3, -1)$ y nula en -1.

La derivada segunda es $h''(x) = \dfrac{-8x}{(x+3)^3}$, de signo positivo en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$, negativo en $(0, +\infty)$ y nula en 0 por lo que presenta un mínimo en (–1 ,0) y una inflexión en $\left(0, \dfrac{1}{9}\right)$. La recta $x = -3$ es asíntota vertical, pues

$$\lim_{x\to 3} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2 = +\infty \text{ y como } \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^2 = 1$$

la recta $y = 1$ es asíntota horizontal por ambos lados. Puede verse la gráfica en la figura 3.

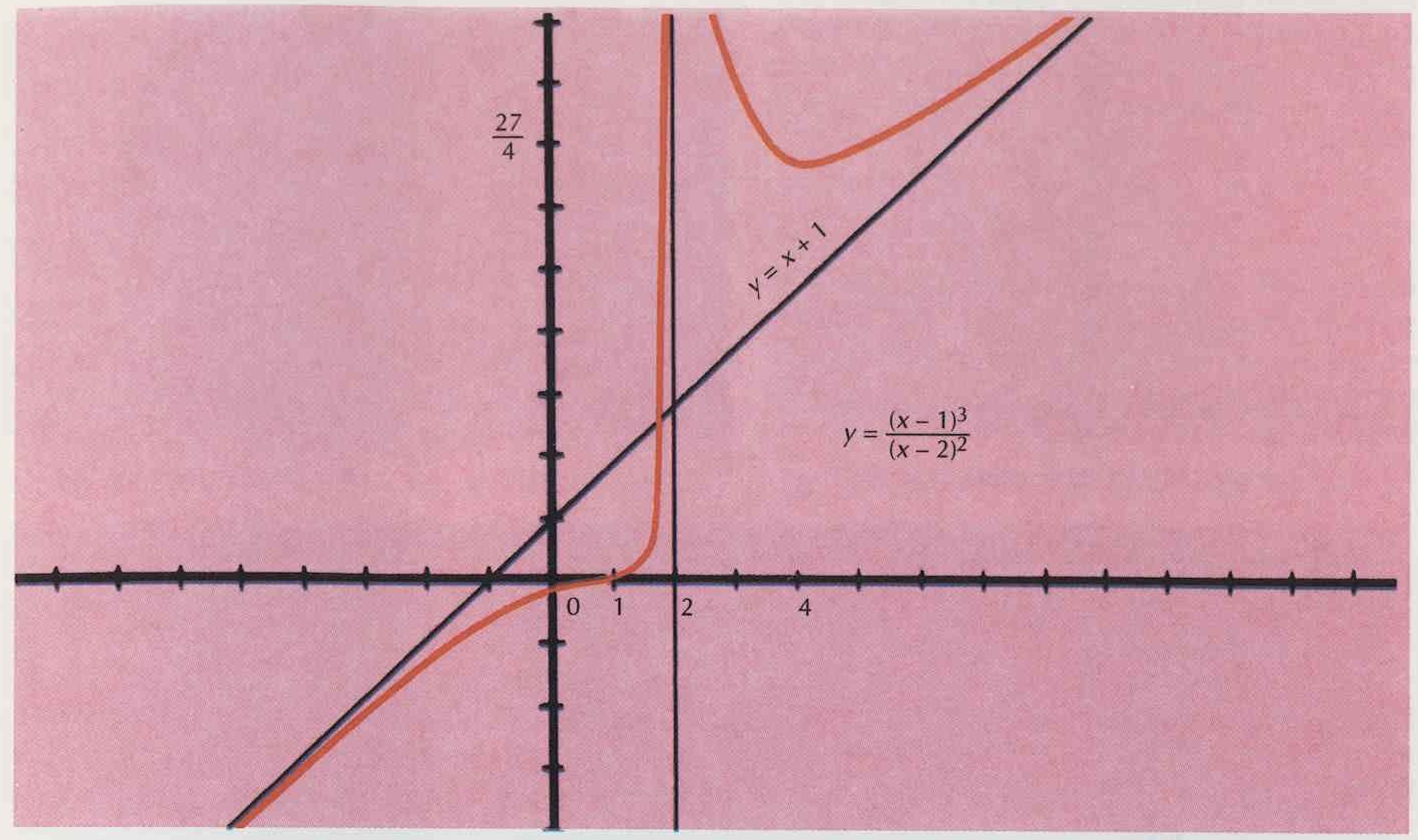


Fig. 1 – Gráfica de la función $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$

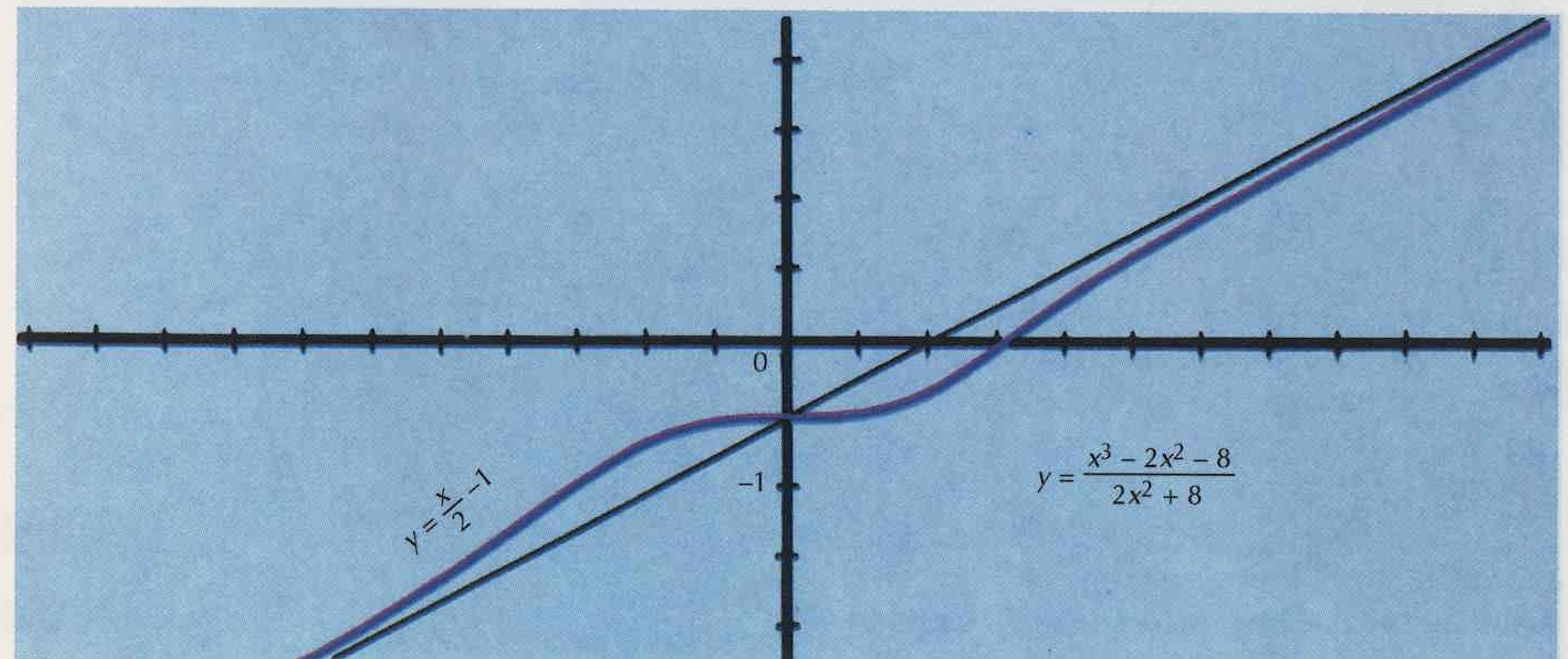


Fig. 2 – Gráfica de $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 8}{2x^2 + 8}$

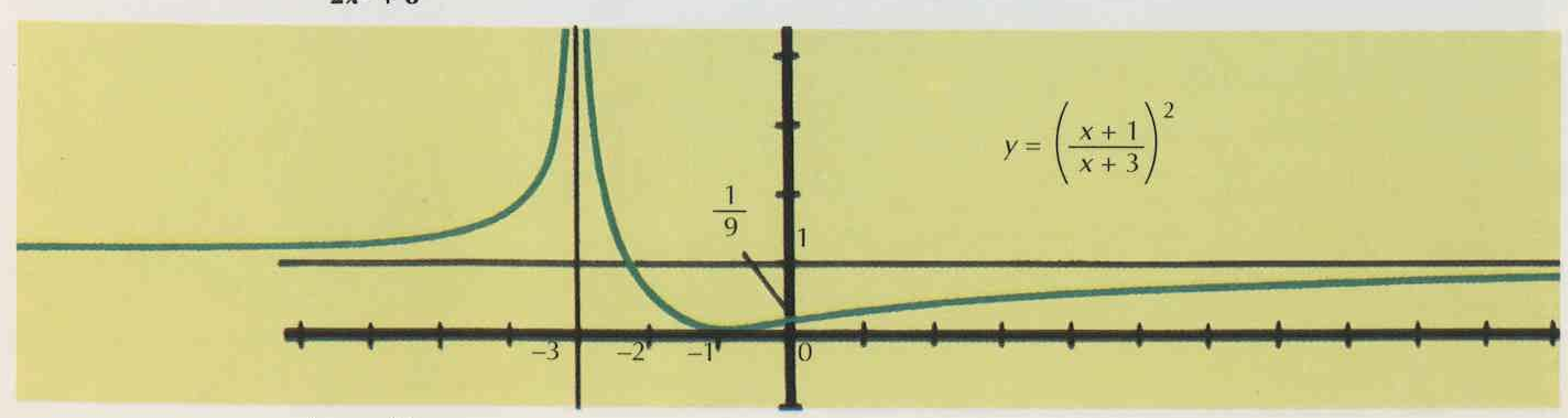


Fig. 3 – Gráfica de $y = \left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^2$

Representar gráficamente $j(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$.
Su dominio es todo **R**, siendo la función par y, por ello, simétrica su gráfica respecto al eje de ordenadas. Es continua en todo punto, pero su derivada

$$j'(x) = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1 - x^2)^2}}$$

no es finita en los puntos de abscisa –1 y 1. El signo j' es negativo en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, positivo en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y es nula en 0. La segunda derivada es positiva en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y negativa en $(-1, 1)$, no anulándose.

No hay asíntota horizontal, pues

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - x^2}}{x} = 0,$$

y como $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{1 - x^2} = -\infty$,

tendremos que la curva se aleja parabólicamente en la dirección asintótica del eje horizontal. Véase toda esta información en la figura 1.

....

Representar gráficamente la función

$$k(x) = \begin{cases} |x|^{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Se trata de una función par, por lo que basta estudiar x^x para $x > 0$. El dominio de k es **R**, siendo continua en todo punto, pues el único peligroso sería $x = 0$ y, sin embargo, $\lim_{x\to 0_+} x^x = 1$

La derivada de x^x es $x^x \cdot (1 + \ln x)$ finita para $x > 0$, siendo su signo negativo en $(0, e^{-1})$, nulo en $(1/e)$ y positivo en $(e^{-1}, +\infty)$ y además

$$\lim_{x\to 0} x^x(1 + \ln x) = -\infty.$$

$$k''(x) = x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1}$$

es positiva $\forall\, x > 0$, por lo que en $(e^{-1}, (e^{-1})^{e^{-1}})$, que es aproximadamente (0,37, 0,69), habrá un mínimo. Atendiendo a la simetría, tendremos la figura 2.

....

Representar gráficamente la función

$$s(x) = x + 2 \text{ arcotg } x.$$

En una función impar, definida en todo **R**.

s' es positva en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, negativa en $(-1, 1)$ y nula en –1 y 1. s'' es negativa en $(-\infty, 0)$, positiva en $(0, +\infty)$ y nula en 0.

Se presenta, por tanto, un mínimo en $(1, 1 + \pi/2)$, un máximo en $(-1, 1 + \pi/2)$ y una inflexión en $(0, \pi)$.

Como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + 2\text{arccotg}x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} 2\text{arccotg } x = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x + 2\text{arccotg}x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} 2\text{arccotg } x = 2\pi,$$

$y = x$ es asíntota por la derecha mientras que $y = x + 2\pi$ lo es por la izquierda (fig. 5).

....

Representar gráficamente $t(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$.
El dominio de $t(x)$ es R^+.

t' es positiva en $(-\infty, e^2)$, nula en e^2 y negativa en $(e^2, +\infty)$. t'' es negativa en $(-\infty, e^{8/3})$, nula en $e^{8/3}$ y positiva en $(e^{8/3}, +\infty)$ por lo que $(e^2, 2e^{-1},)$ habrá un máximo y en $\left(e^{8/3}, \frac{8}{3} e^{-(4/3)}\right)$ una inflexión.

Como $\lim_{x\to 0_+} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$.
$x = 0$ es asíntota vertical e $y = 0$ es asíntota horizontal por la derecha (fig. 3).

....

Representar gráficamente

$$u(x) = \cos x - \cos^2 x.$$

Es una función par y de período 2π, por lo que basta su estudio para $x \in [0, \pi]$

u' es positiva en $(0, \pi/3)$, negativa en $(\pi/3, \pi)$ y nula en 0, $\pi/3$ y $\pi \cdot u''$ es positiva en $(0, \alpha) \cup (\beta, \pi)$, negativa en (α, β) y nula en α y β, donde

$$\alpha = \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \quad \beta = \arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8}.$$

No hay asíntotas, pero sí la dirección asintótica $y = 0$ (fig. 6).

....

Representar gráficamente $v(x) = e^{\text{sen}x}$.
El dominio es todo **R**, y tiene período 2π por lo que se estudia en $[-\pi, \pi]$.

v' es negativa en $(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$, positiva en $(-\pi/2, \pi/2)$ y nula en $\pm \pi/2$. v'' es positiva en $(-\pi, \alpha) \cup (\beta, \pi)$, negativa en (α, β) y nula en α y en β donde

$$\alpha = \text{arc sen } \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad \beta = \pi - \alpha$$

teniendo mínimo en $(-\pi/2, 1/e)$, máximo en $(\pi/2, e)$ e inflexiones en los puntos de abscisa α y β. Carece de asíntotas pero se aleja en la dirección horizontal (fig. 4)

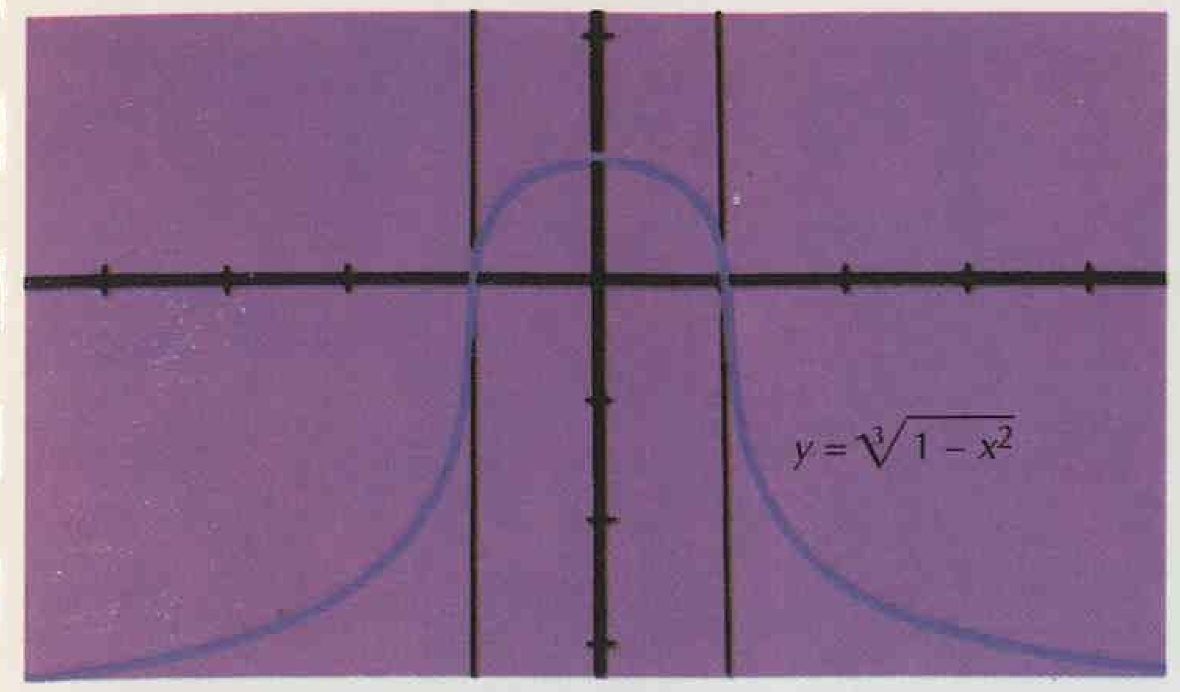


Fig. 1 – Gráfica de $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

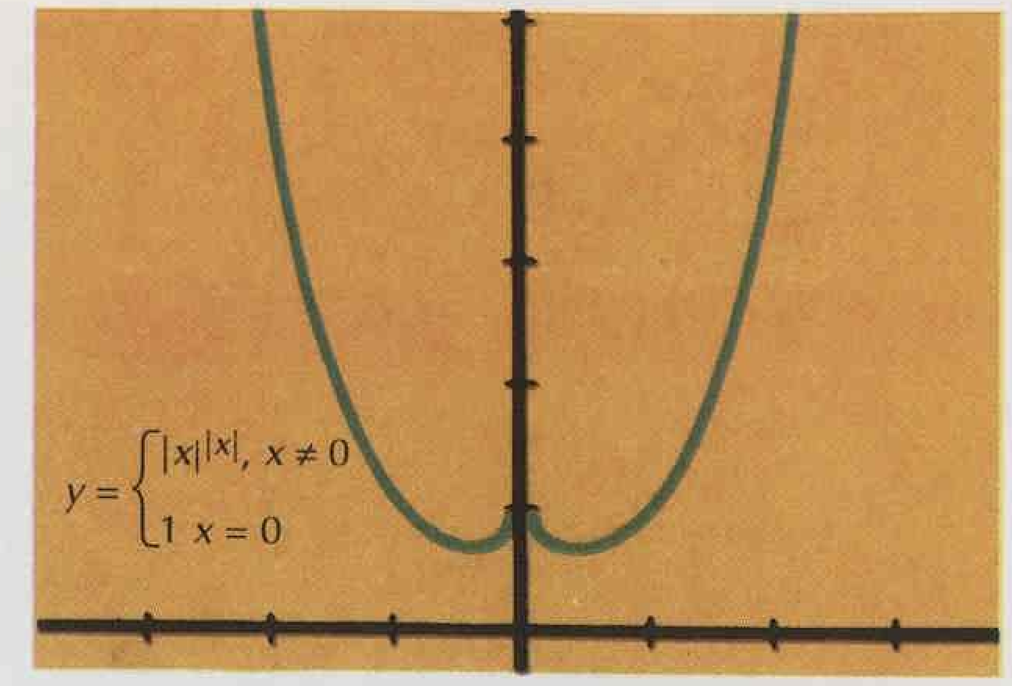


Fig. 1 – Gráfica de $y = |x|^{|x|}$ (1 si $x = 0$).

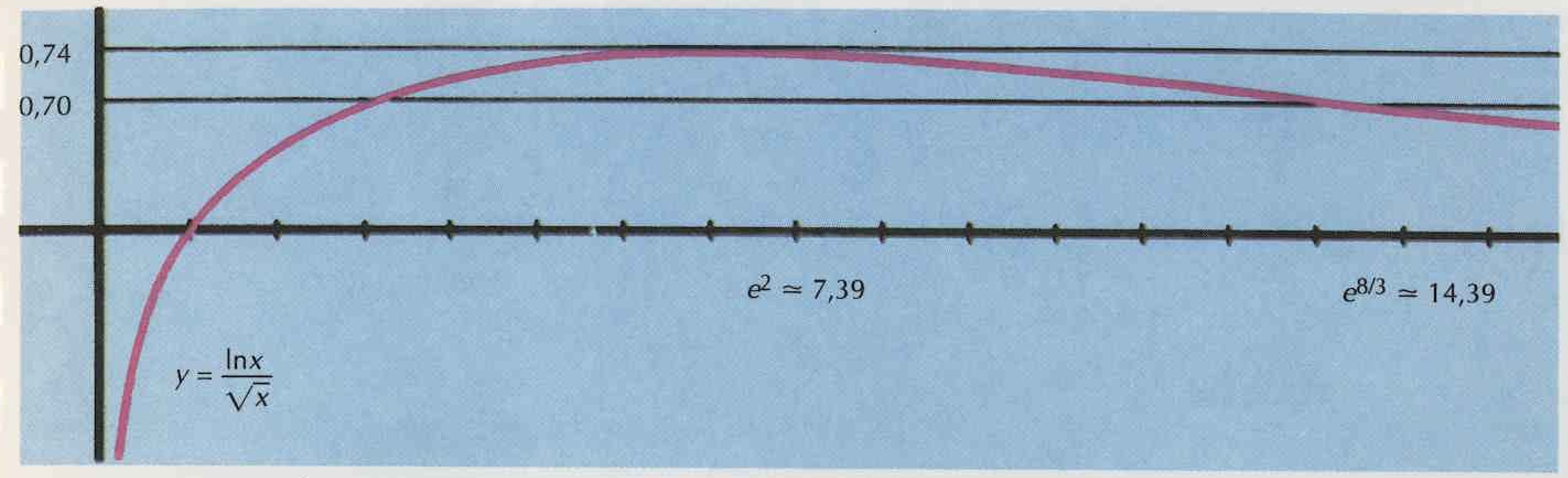


Fig. 3 – Gráfica de $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

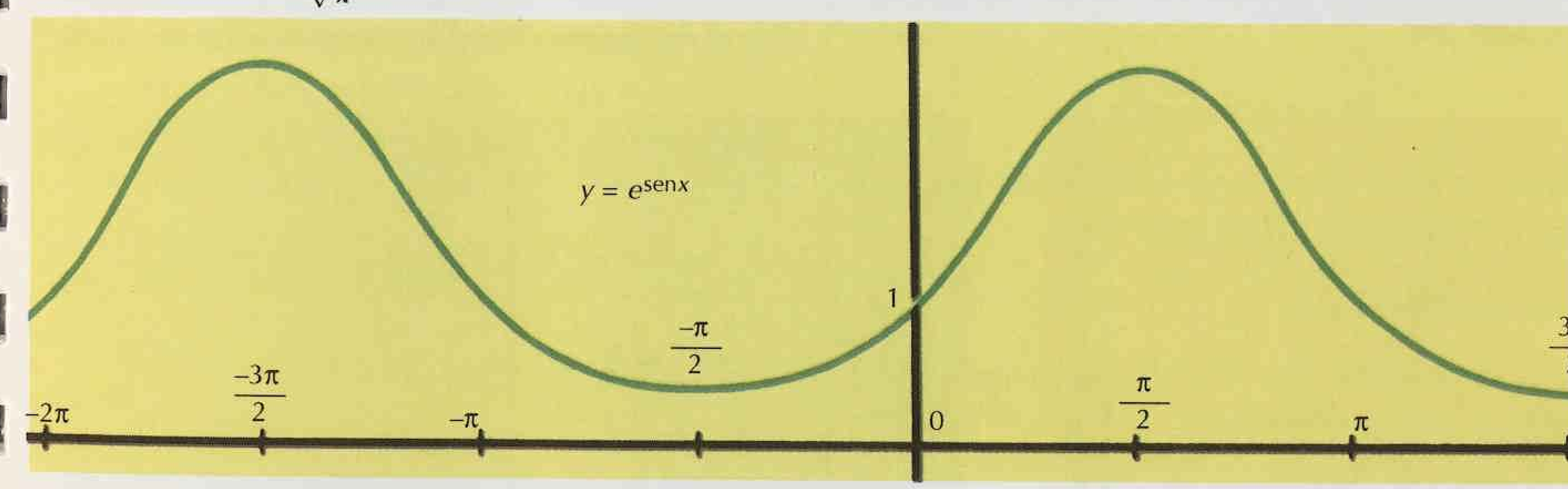


Fig. 4 – Gráfica de $y = e^{\text{sen}x}$

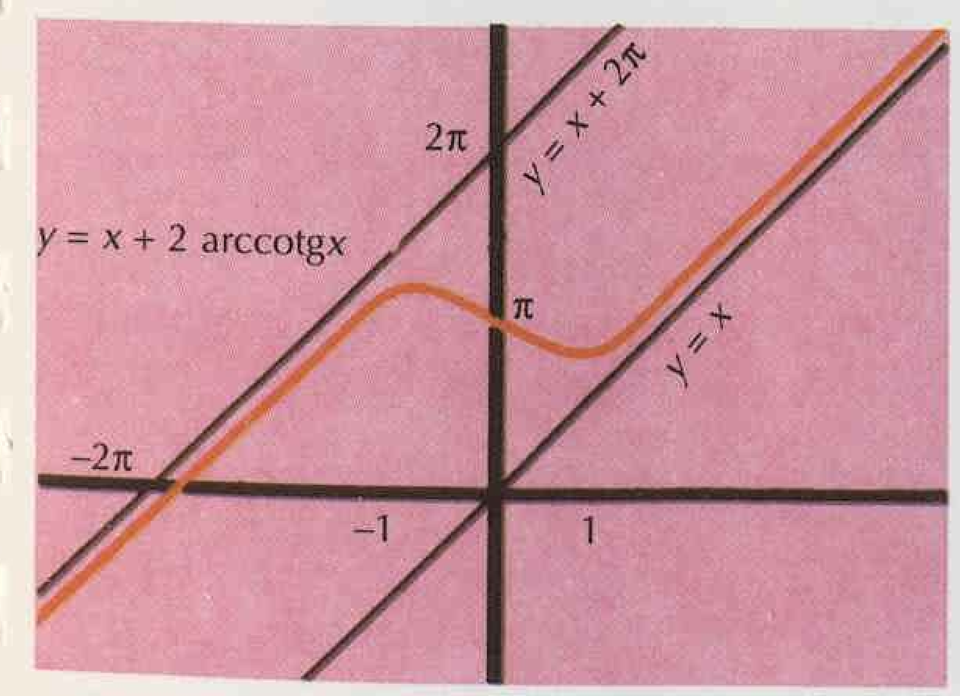


Fig. 5 – Gráfica de $y = x + 2$ arcotgx.

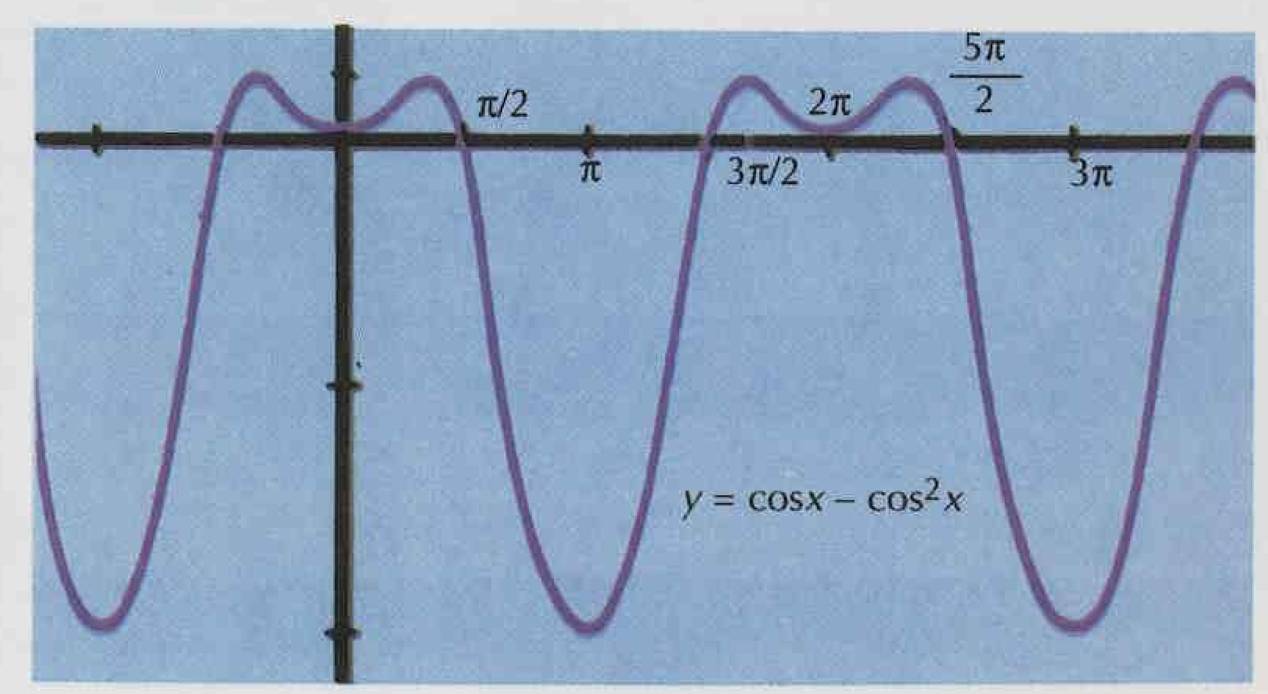


Fig. 5 – Gráfica de $y = \cos x - \cos^2 x$

CÁLCULO APROXIMADO DE RAÍCES DE ECUACIONES

Una vez hallados los intervalos en los que la ecuación $f(x) = 0$ tenga solución única (*separación de raíces*) hay diversos métodos para resolver aproximadamente la ecuación. Si f es continua en un intervalo $[a, b]$ de su dominio, y $f(a) \cdot f(b) < 0$, el Teorema de Bolzano (D/2) nos asegura la existencia de una raíz en (a, b). Si $f'(x)$ es siempre positiva o siempre negativa en $[a, b]$ tal raíz será única. El propio Teorema de Bolzano nos proporciona un método para hallarla, aunque los hay menos lentos.

Método de las cuerdas (o de las partes proporcionales)

Si α es la raíz única de $f(x) = 0$ en $[a, b]$, reemplazando la curva $y = f(x)$ por la cuerda desde $(a, f(a))$, hasta $(b, f(b))$ se obtiene (fig. 1) la primera aproximación

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a),$$

repitiéndose el procedimiento en aquel de los intervalos $[a, x_1]$, $[x_1, b]$ en cuyos extremos f tome valores de signo opuesto. El error absoluto $\alpha - x_n$ de la enésima aproximación puede acotarse por

$$|\alpha - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m},$$

donde m es el mínimo de la derivada $f'(x)$ en $[a, b]$, supuesta existente y no nula.

Método de Newton

Si $f'(x) \neq 0$ y $f''(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$ cumpliéndose $f(a) \cdot f(b) < 0$ y además $f(a) \cdot f'(a) > 0$, se pueden hallar aproximaciones sucesivas mediante

$$x_0 = a, \; x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

A este método se le llama también el de *las tangentes,* pues se reemplaza la curva por las tangentes en los sucesivos puntos $(x_n, f(x_n))$ (fig. 2). La última condición exigida, $f(a) \cdot f''(a) > 0$ (o bien $f(b) \cdot f''(b) > 0$) nos asegura la mejora de la aproximación. Puede verse un contraejemplo en la figura 3. El error absoluto se acota como en el Método de las cuerdas. A menudo se usa

$$x_0 = a, \; x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(a)},$$

más sencillo y de una exactitud similar.

Método de iteración

Si $k \neq 0$ los x que cumplan $f(x) = 0$ son los mismos que satisfacen $x = x - k \cdot f(x)$, con lo que estamos intersectando $y = x$ con $y = x - k \cdot f(x)$ en vez de cortar $y = 0$ con $y = f(x)$, tal como hacíamos anteriormente (fig. 4). Si se toma k tal que $|1 - k \cdot f'(x)|$ sea pequeño en un entorno de x_0 (en particular si $1 - k \cdot f'(x_0) = 0$), se tienen las sucesivas aproximaciones

$$x_{n+1} = x_n - k \cdot f(x_n)$$

- **Ejemplo.** Resolver aproximadamente la ecuación $x^2 - 2 \ln x - 3 = 0$.

La representación gráfica (fig. 5) nos muestra la presencia de una raíz en $(0, 1)$ y otra en $(2, e)$. Hallaremos esta última.

Por el método de las cuerdas es

$$x_0 = 2,\; x_1 = 2 - \frac{f(2{,}1)}{f(e) \cdot f(2{,}1)}(e - 2{,}1) \simeq 2{,}118,$$

$$x_3 = 2{,}121,\; x_4 = 2{,}122,\; x_5 = 2{,}122,$$

valor que tomaremos ya al haberse estancado la sucesión. Como en $[2, e]$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x} \le \frac{2(e^2 - 1)}{2} < 6{,}39,$$

el error se puede acotar por

$$\frac{|f(x_5)|}{6{,}39} \simeq \frac{0{,}0018}{6{,}39} < 0{,}0003.$$

Por el método de Newton (simplificado) tenemos

$$f'(x) = 2(x^2 - 1)/x,\; f''(x) = 2(x^2 - 1)/x^2$$

no nulas en $[2, e]$. Además $f(2) \cdot f(e) < 0$, $f(2) \cdot f''(2) < 0$, $f(e) \cdot f''(e) > 0$, por lo que será

$$x_0 = e = 2{,}718,\; x_1 = e - \frac{f(e)}{f'(e)} \simeq 2{,}21,$$

$$x_2 = 2{,}21 - \frac{f(2{,}21)}{f'(e)} \simeq 2{,}146,\; x_3 \simeq 2{,}129,$$

$$x_4 \simeq 2{,}124,\; x_5 \simeq 2{,}122,\; x_6 \simeq 2{,}122$$

mientras que por el método no simplificado es

$$x_0 = e,\; x_1 = e - \frac{f(e)}{f'(e)} \simeq 2{,}21,$$

$$x_2 = 2{,}21 - \frac{f(2{,}21)}{f'(2{,}21)} \simeq 2{,}125,$$

$$x_3 = 2{,}122,\; x_4 = 2{,}122.$$

Por iteración, si hacemos $1 - k \cdot f'(2) = 0$ obtenemos $k = 1/3$, por lo que la sucesión es

$$x_0 = 2 \;\; x_1 = 2 - \frac{f(2)}{3} \simeq 2{,}128$$

$$x_2 = 2{,}128 - \frac{f(2{,}128)}{3} \simeq 2{,}122$$

$$x_3 = 2{,}122 - \frac{f(2{,}122)}{3} \simeq 2{,}122.$$

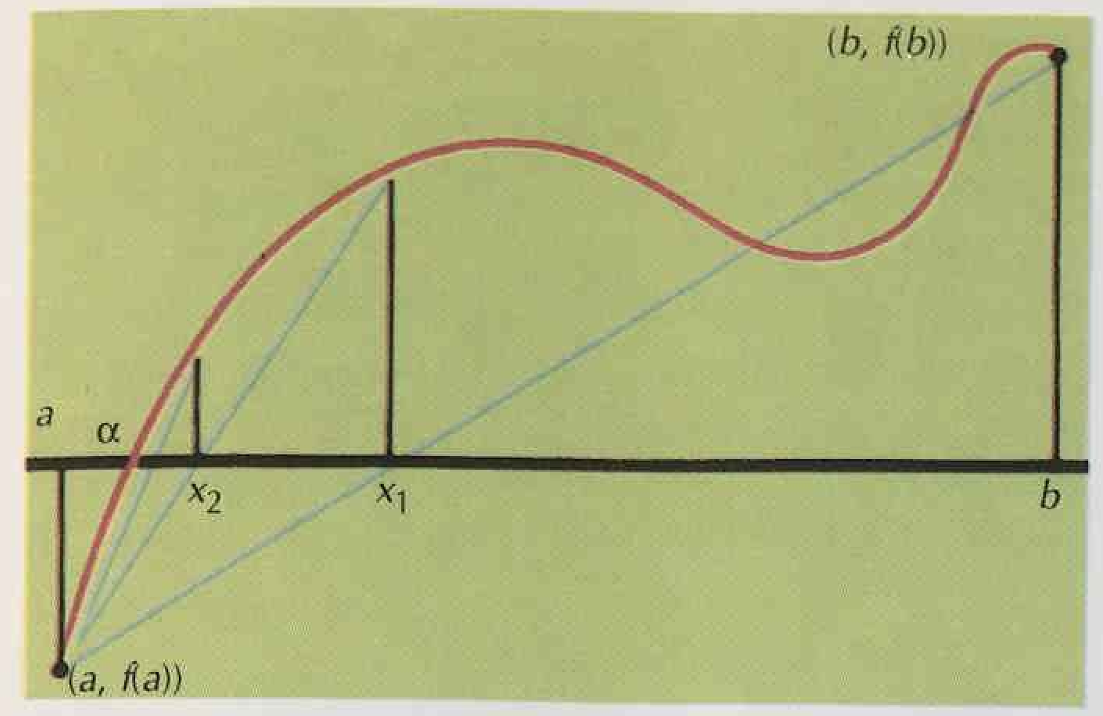


Fig. 1 – Método de las cuerdas.

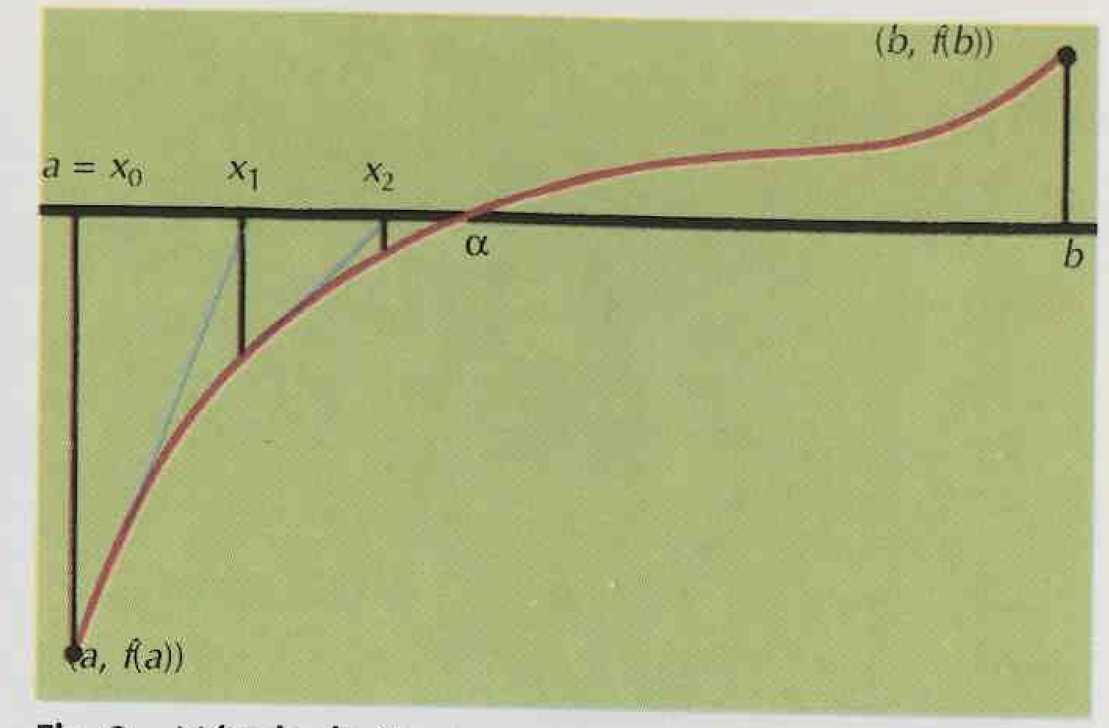


Fig. 2 – Método de Newton.

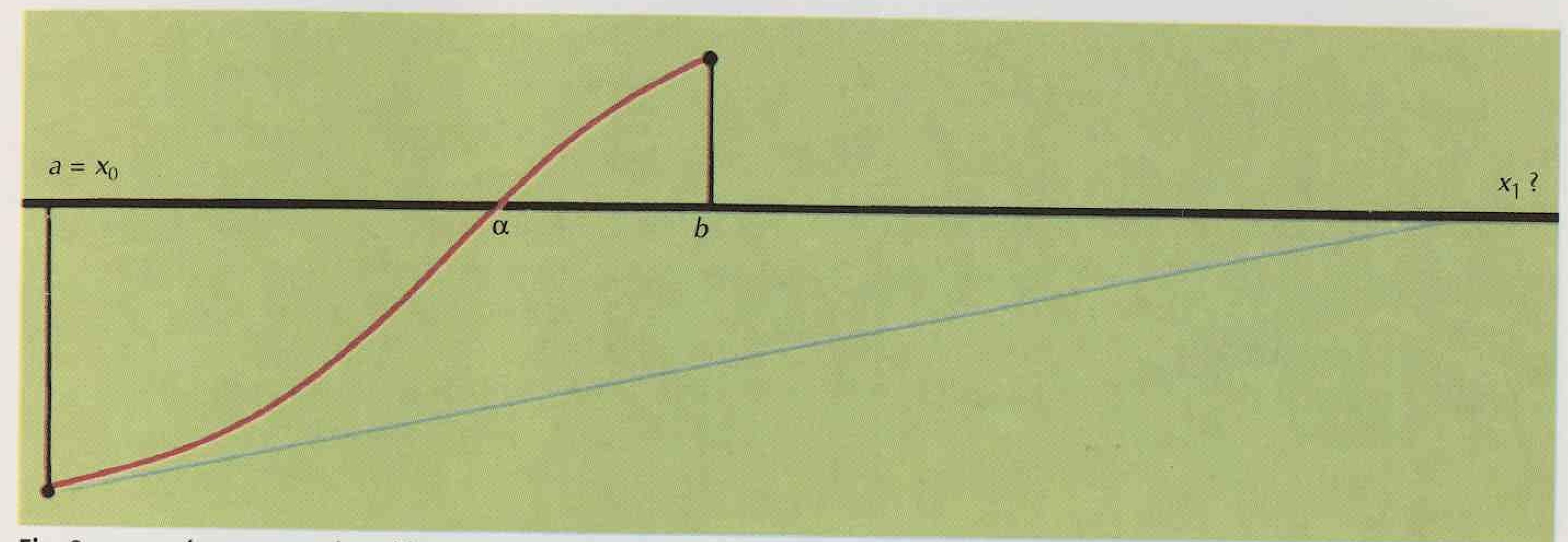


Fig. 3 – x_1 sería una aproximación peor que x_0.

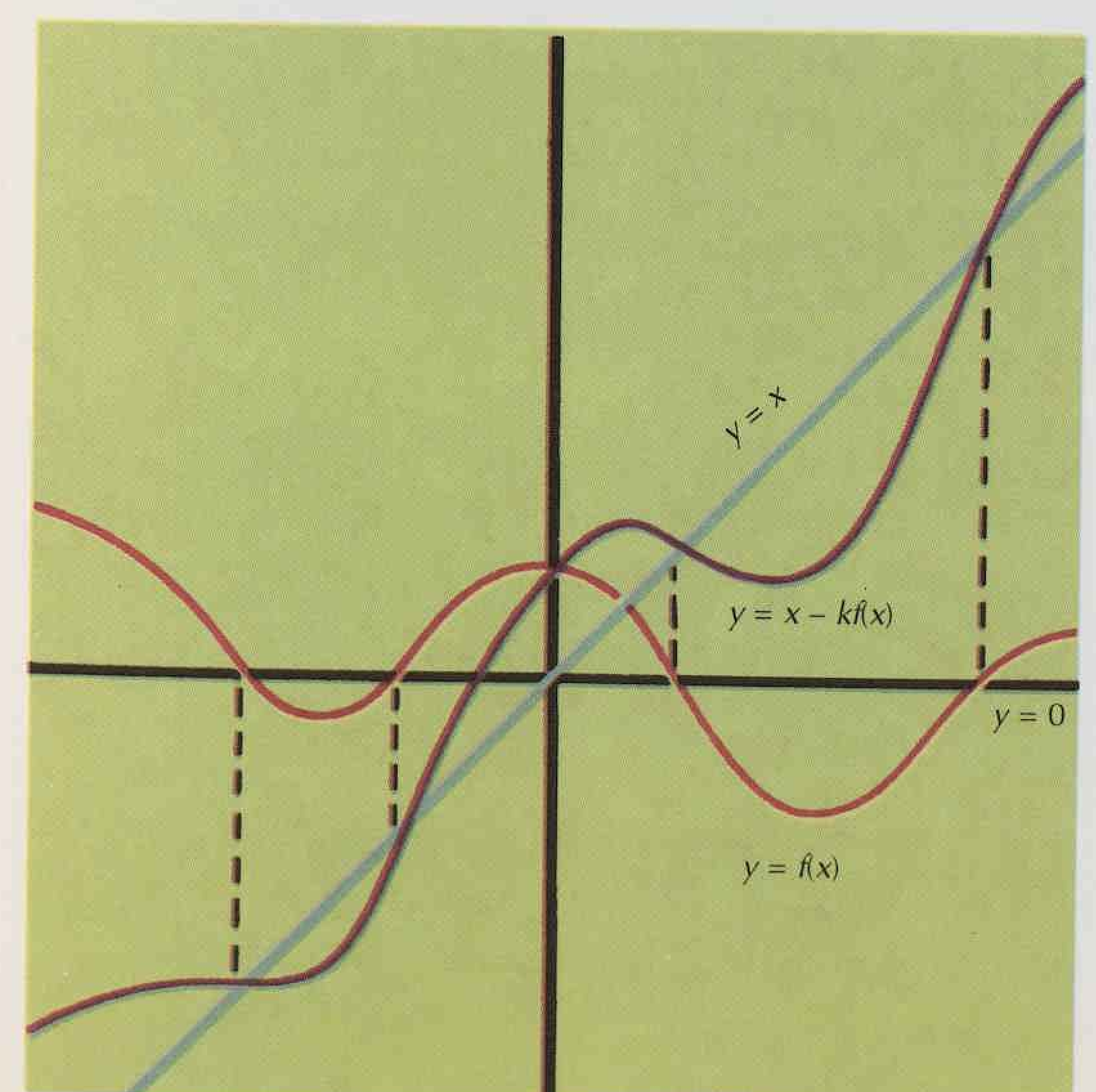


Fig. 4 – Método de iteración.

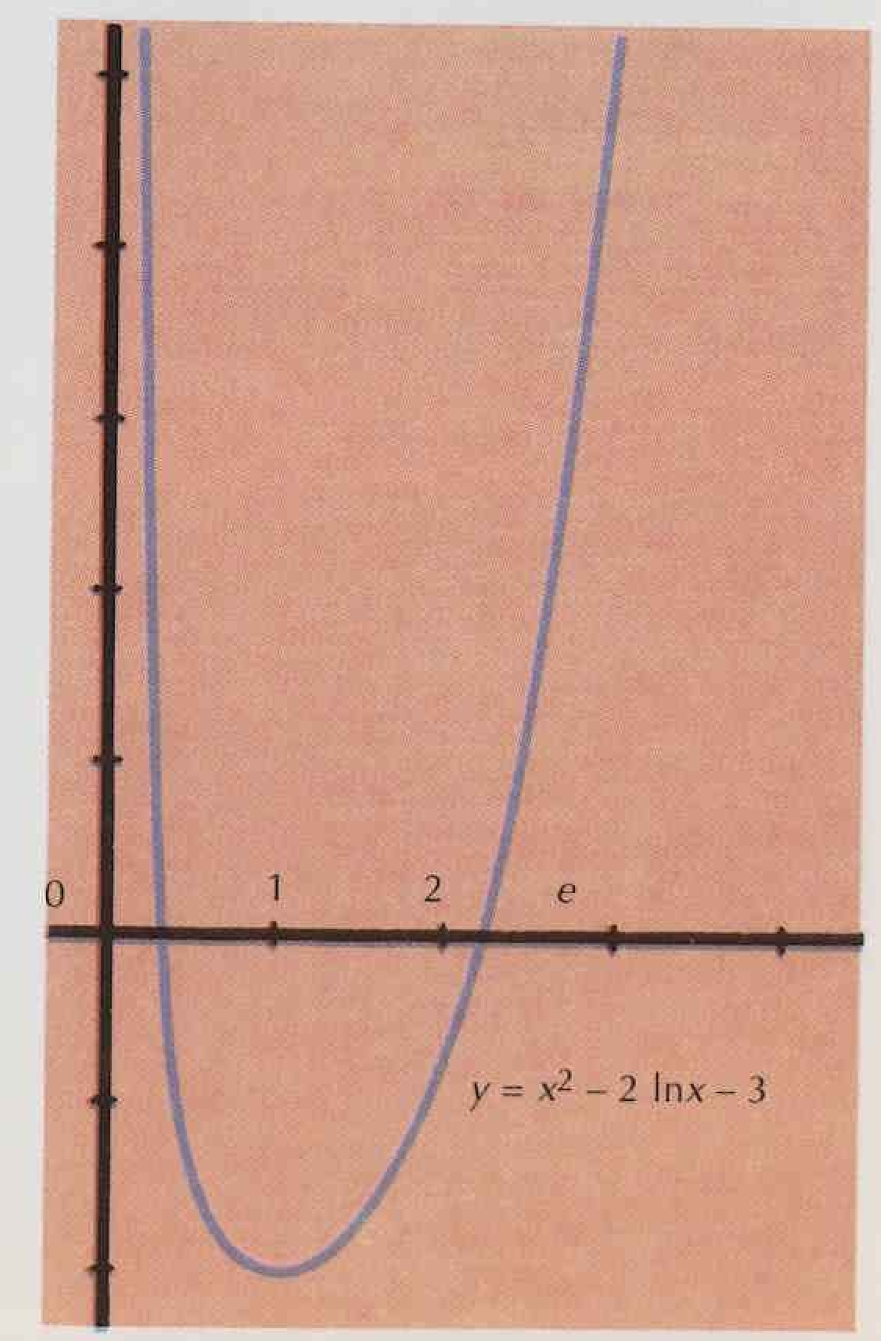


Fig. 5 – Gráfica de $y = x^2 - 2 \ln x - 3$

Integración

INTEGRAL DEFINIDA

Sea f una función acotada en $[a, b]$ y $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = h$ una subdivisión del intervalo $[a, b]$. Si tomamos n puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ la suma $\Sigma\, f(t_i)\,(x_i - x_{i-1})$ se dice que es una *suma integral* de f en $[a, b]$. Cada valor $f(t_i)\,(x_i - x_{i-1})$ representa el área de un paralelogramo (fig. 1), tomada negativamente si $f(t_i) < 0$.

Si existe límite de las sumas integrales cuando n tiende a infinito de tal manera que la mayor de las diferencias $x_i - x_{i-1}$ tienda a 0, recibe el nombre de *integral definida de* f *entre* a *y* b, diciéndose también que f es *integrable-Riemann* en $[a, b]$ (aunque en adelante diremos *integrable,* simplemente). La integral definida se denota

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

y se interpreta como área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ (fig. 2) cuando $f(x) \geq 0$ en a, b, y como suma algebraica de áreas si el signo de f varía, computando negativamente las figuras bajo el eje (fig. 3).

- **Ejemplo.** Hallar el área limitada por $x = 0$, $x = k$, $y = 0$ e $y = e^x$.

Dividamos el segmento [0, k] en n partes iguales

$$\left[0, \frac{k}{n}\right], \left[\frac{k}{n}, \frac{2k}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}\,k, \frac{n}{n}\,k\right]$$

y tomemos t_i como el primer punto de cada subintervalo. La suma integral es

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot e^{\frac{m-1}{n}k}$$

con lo que el área es

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{k}{n}\left(e^0 + e^{\frac{k}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}k}\right)\right] =$$

$$= \lim \frac{k}{n}\,\frac{1 - e^k}{1 - e^{k/n}} = e^k - 1,$$

$$\text{luego} \int_0^k e^x\,dx = e^k - 1.$$

Propiedades de las funciones integrables

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{R}.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,. \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

$$\int_a^b \alpha \cdot dx = \alpha \cdot (b - a).$$

Si $f(x) \leq g(x)$, es $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Proposición. Si f es continua en $[a, b]$ también es integrable en $[a, b]$.

Proposición. Si f es discontinua tan sólo en un número finito (o infinito numerable) de puntos de $[a, b]$, f es integrable en $[a, b]$.

Primer teorema del valor medio. Si f es integrable en $[a, b]$, existe λ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lambda \cdot (b - a).$$

donde inf f en $[a, b] \leq \lambda$ sup f en $[a, b]$.

Además, si f es continua en $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que $\lambda = f(c)$ (fig. 4)

Al valor λ que aparece en el teorema,

$$\lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

se le llama *valor medio* de la función f en el intervalo $[a, b]$. Esta noción, que promedia los infinitos valores de f en el intervalo, generaliza de manera natural el concepto de media aritmética de un número finito de cantidades.

- **Ejemplo.** Si para hallar la media de $f(x) = x^2$ en [0, 1] promediamos sus valores en 0, 1 obtenemos

$$\frac{0^2 + (\frac{1}{n})^2 + \dots + (\frac{n-1}{n})^2 + 1}{n+1} = \frac{2n+1}{6n}\,,$$

valor que es diferente para cada n. Si n tiende a infinito, el valor límite es 1/3, el mismo que se obtiene buscando la λ del teorema precedente.

Segundo teorema del valor medio. Si f y g son continuas en $[a, b]$ siendo g positiva decreciente, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx.$$

Teorema fundamental del cálculo integral. Si f es integrable en $[a, b]$, la *función integral*

$$F(x) + \int_a^x f(t)\,dt$$

es continua en $[a, b]$ y además, si f era continua en x_0, F es derivable en x_0, siendo $F'(x_0) = f(x_0)$.

Regla de Barrow. Si f es integrable en $[a, b]$ y G es una *primitiva* de f, es decir, una función tal que $G'(x) = f(x)$, se tiene

$$\int_a^c f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Debe señalarse la importancia de esta última propiedad, pues permite calcular integrales definidas mediante primitivas de las funciones y ya no como límite de sumas integrales.

Es usual denotar $G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$.

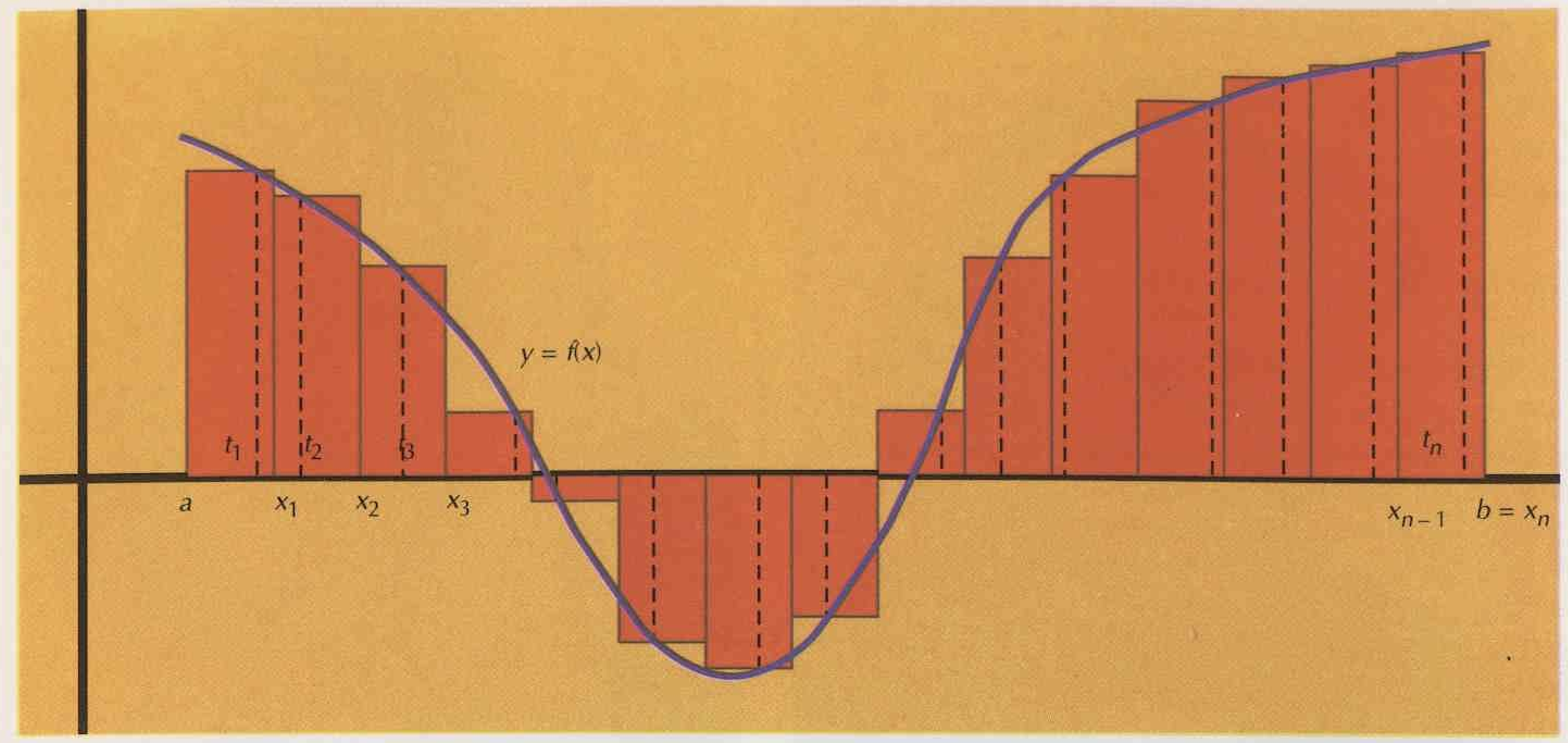


Fig. 1 – Suma integral.

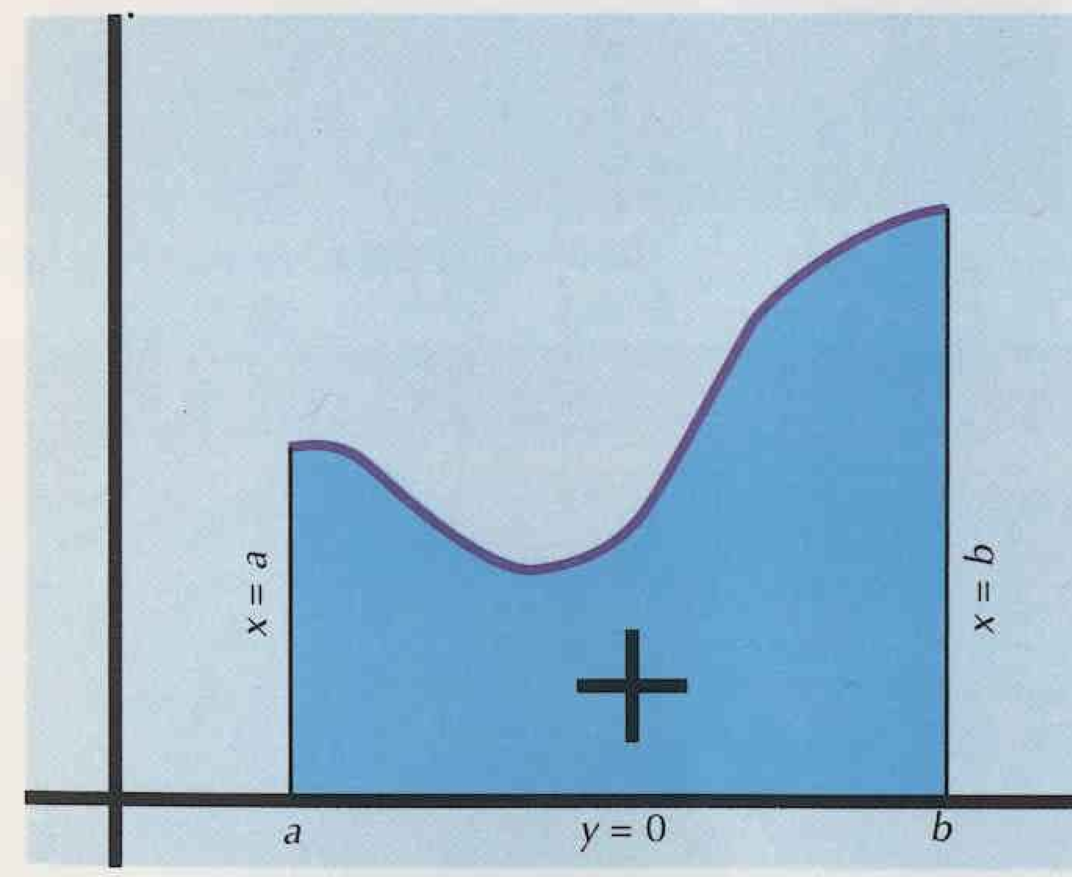


Fig. 2 – Área.

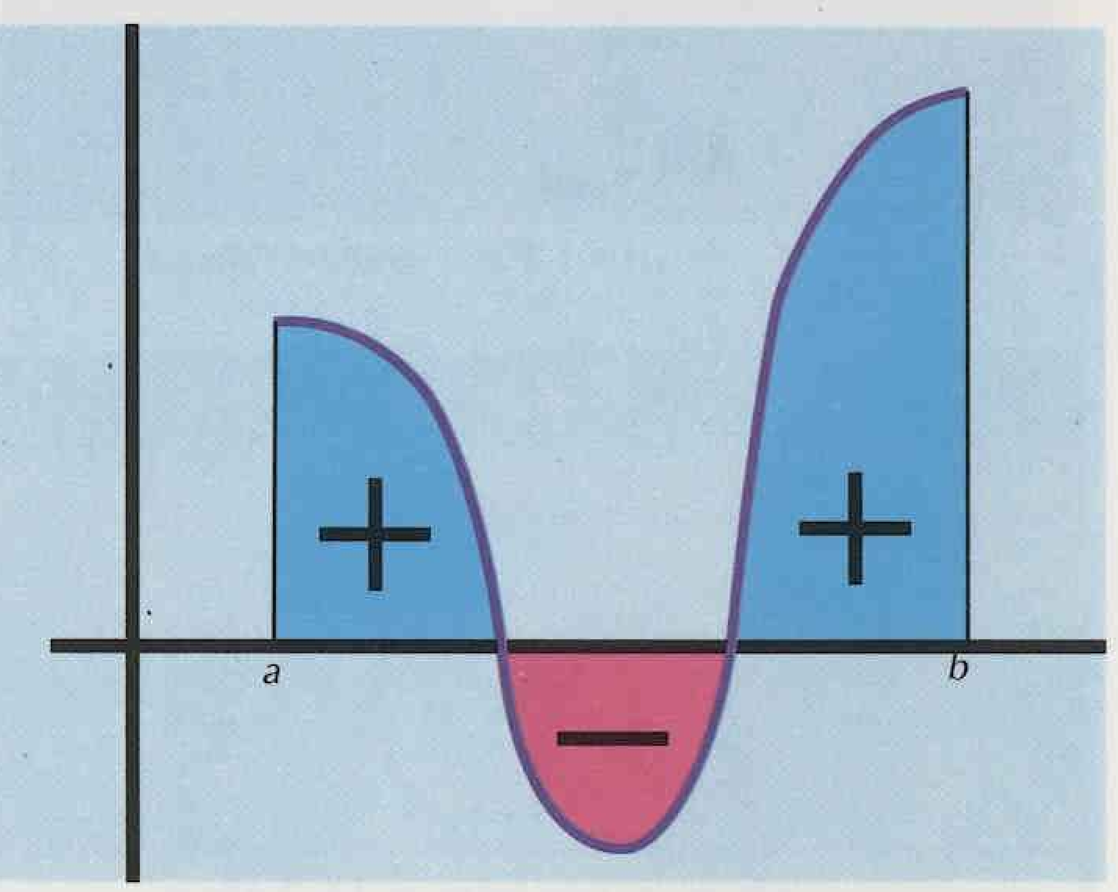


Fig. 3 – Signos de área.

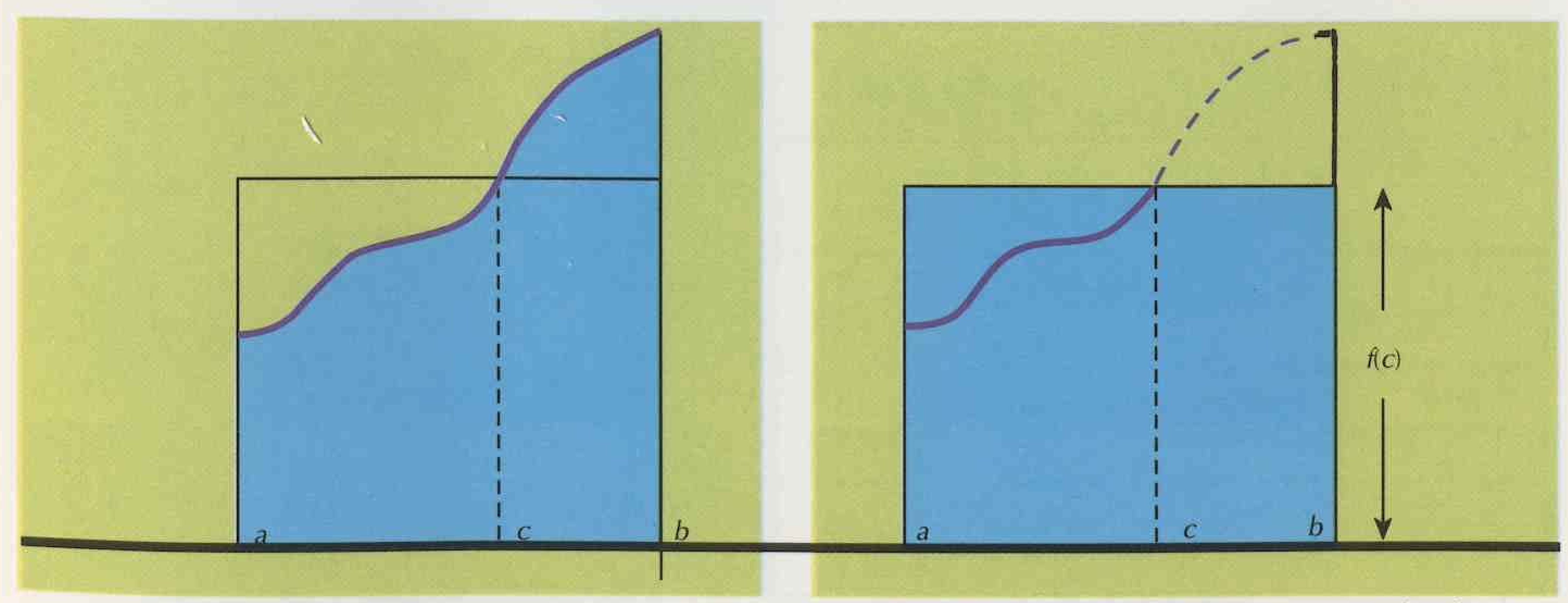


Fig. 4 – El área encerrada en la figura de la izquierda coincide, según el teorema del valor medio, con la de un rectángulo con la misma base y cuya altura (valor medio) es el valor de la función en cierto punto del intervalo.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Si F es una primitiva de f, es decir, $F' = f$, las restantes primitivas se obtienen (según se dijo en E/5), sumando a F cualquier constante C. El conjunto de primitivas de f se denomina *integral indefinida de f* y se denota

$$\int f(x)\,dx\,,$$

por lo que, si F es una primitiva de f, pondremos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

El conocimiento directo de las derivadas conlleva el conocimiento de la integral indefinida en sentido contrario. Estas integrales directas se hallan recogidas en la tabla adjunta. Por otra parte, la derivación de función de función —o regla de la cadena—, nos permite considerar como inmediatas las integrales recogidas en la tabla de la página siguiente. Pueden ya integrarse numerosas funciones con estas tablas y las dos reglas que siguen:

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

$$\int m\cdot f(x)\,dx = m\int f(x)\,dx \quad \forall\, m \in \mathbf{R}.$$

- **Ejemplos.**

$$\int (3x^5 + 7x + 2)\,dx = 3\,\frac{x^6}{6} + 7\,\frac{x^2}{2} + 2x + C.$$

$$\int \frac{3\sqrt[5]{x} - 2x\sqrt{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx =$$

$$= \int (3x^{\frac{1}{5}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 4)\,x^{\frac{2}{3}}\,dx =$$

$$= \int (3x^{\frac{-17}{15}} - 2x^{\frac{5}{6}} + 4x^{\frac{-2}{3}})dx =$$

$$= 3\,\frac{15}{8}\,x^{\frac{8}{15}} - 2\,\frac{6}{11}\,x^{\frac{6}{11}} + 4\cdot 3\cdot x^{\frac{1}{3}} + C$$

$$\int \frac{7x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx = \frac{7}{2}\int 2x\cdot(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}\,dx =$$

$$= \frac{7}{2}\,\frac{3}{2}\cdot(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + C.$$

$$\int \sqrt{\frac{\text{arcsen}\,x}{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(\text{arcsen}\,x)^{3/2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot(\text{arcsen}\,x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,(\ln x)^2\,dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\,\text{arctg}\,x^3 + C.$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-5}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x-5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3+3x-5| + C.$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + C.$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \text{arcsen}\,e^x + C$$

$$\int \frac{\text{ch}(5+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\text{ch}(5+\sqrt{x})\,dx =$$

$$= 2\,\text{sh}\sqrt{x} + C.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+(\ln x)^2}}\,dx =$$

$$= \text{arcsh}\,(\ln x) + C.$$

$$\int \frac{4^{\text{tg}x}}{\cos^2 x}\,dx = \frac{4^{\text{tg}x}}{\ln 4} + C.$$

$$\int \frac{1}{\text{sen}x\cdot\cos x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\text{tg}x}\,dx =$$

$$= \ln|\text{tg}x| + C.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx =$$

$$= 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx = 2\text{arcsen}\,\sqrt{x} + C.$$

$$\int \frac{2}{7^{1-x}}\,dx = 2\cdot\int 7^{x-1}\,dx = 2\,\frac{7^{x-1}}{\ln 7} + C.$$

$$\int \text{tg}x\,dx = \int \frac{\text{sen}x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\text{sen}x}{\cos x}\,dx =$$

$$= -\ln|\cos x| + C.$$

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx =$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

$$\int \text{sen}^2\frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1-\cos x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}x}{2} + C.$$

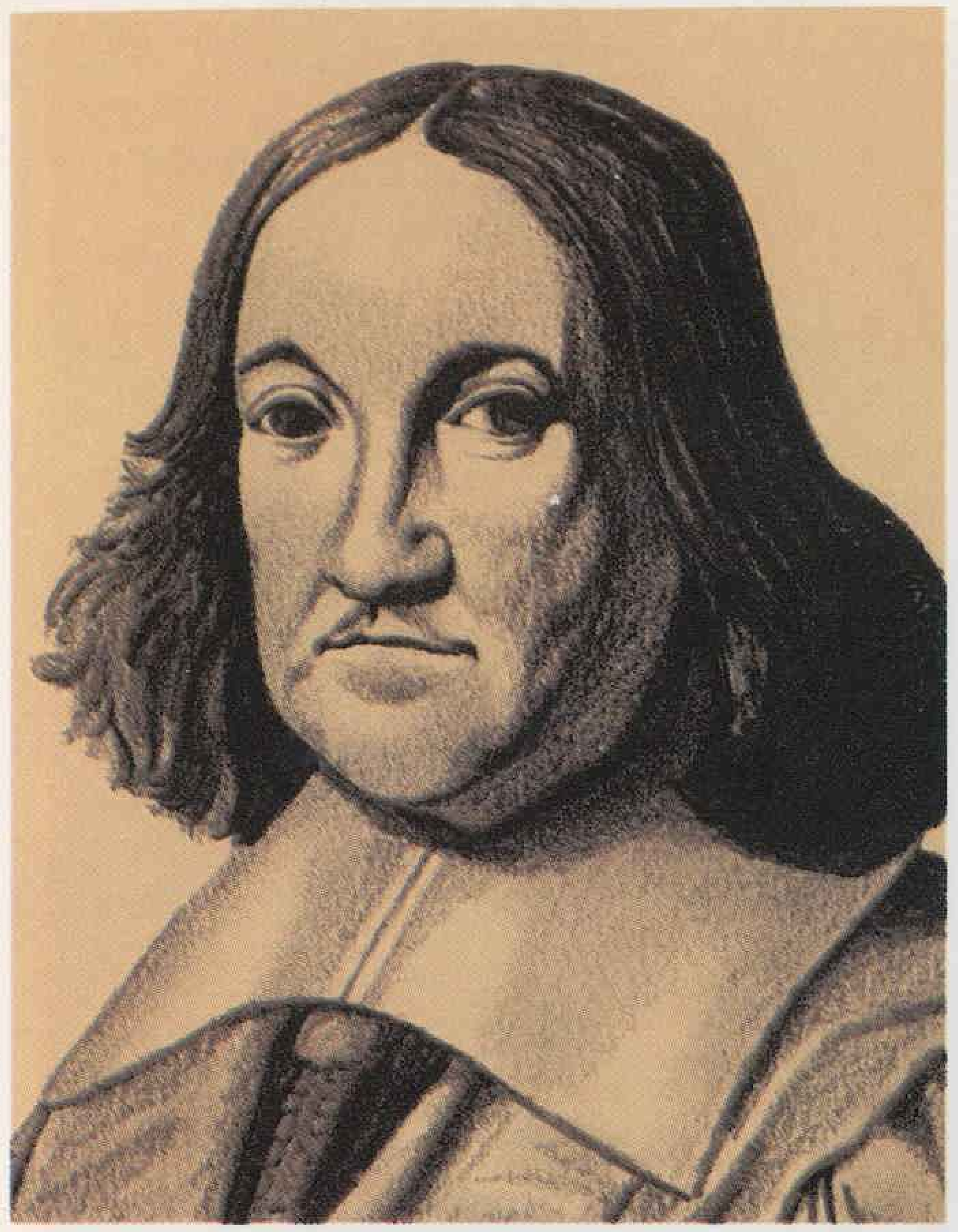


Fig. 1 – Pierre de Fermat (1601-1665).

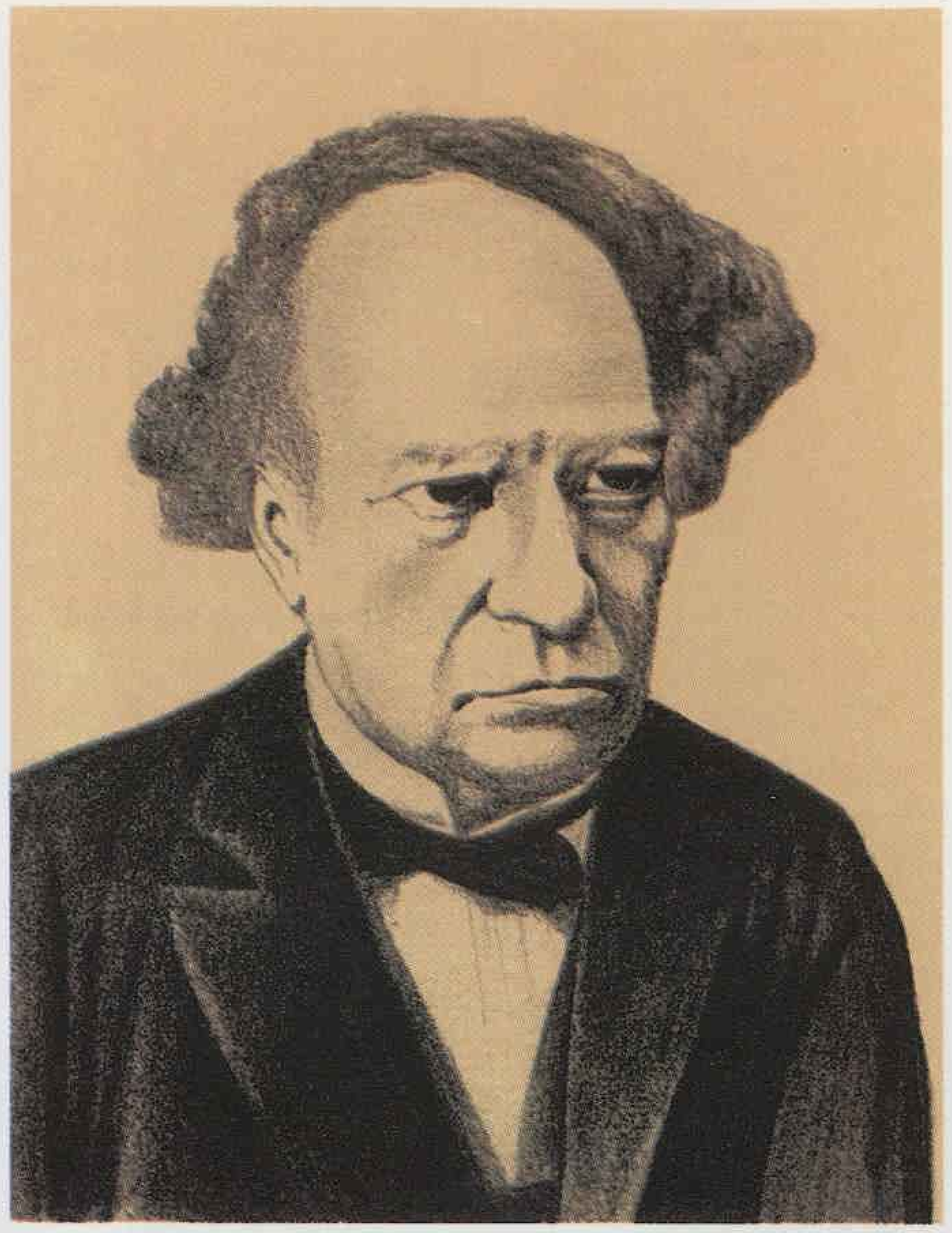


Fig. 2 – Charles Hermite (1822-1901).

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arcsen}x + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arctg}x + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \text{arcsec}x + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \text{sh}x\,dx = \text{ch}x + C$
$\int \text{sen}x\,dx = -\cos x + C$	$\int \text{ch}x\,dx = \text{sh}x + C$
$\int \cos x\,dx = \text{sen}x + C$	$\int \frac{1}{\text{ch}^2 x}\,dx = \text{tgh}x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \text{tg}x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \text{argsh}x + C$
$\int \frac{1}{\text{sen}^2 x}\,dx = -\text{cotg}x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \text{argch}x + C$
$\int \frac{\text{sen}x}{\cos^2 x}\,dx = \sec x + C$	$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \text{argtgh}x + C$
$\int \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}\,dx = \text{cosec}x + C$	

Fig. 3 – Integrales directas.

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Si se hace $x = g(t)$, donde t es una variable nueva y g derivable, se tiene

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \cdot dt$$

teniendo el método interés cuando se aplica de tal manera que la segunda integral sea más fácil que la primera. Una vez resuelta, se hace $t = g^{-1}(x)$ para retornar a la variable inicial. Las integrales inmediatas de la tabla contigua son en realidad cambios de variable que por su sencillez se efectúan mentalmente.

La diferencial en un punto a de una función derivable f es la aplicación lineal que hace corresponder a cada h (o incremento de x, Δx) el incremento de la ordenada de la tangente en $(a, f(a))$ al pasar al punto de abscisa $x + \Delta x$, o sea df = diferencial de $f = f'(x) \cdot \Delta v$ en cada punto, y como $dx = \Delta x$, será

$$df = f'(x)\, dx.$$

El lenguaje de la *diferenciación* se usa habitualmente, pues se *diferencia* $x = g(t)$ cuando con tal cambio quiere resolverse una integral.

• **Ejemplos.** La integral $I = \displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx$ puede resolverse haciendo

$$z = \operatorname{sen} x,\ dz = \cos x\, dx;$$

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cos x\, dx = \int \frac{1 - z^2}{\sqrt{z}}\, dz =$$

$$= \int \left(z^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{3}{2}}\right) dx = 2z^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}\, z^{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{sen} x}\,[4 + \cos^2 x] + C.$$

....

La integral

$$J = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx$$

haciendo el cambio

$$x = 3 \operatorname{sen} t,\ dx = 3 \cos dt,\ t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2}$$ se

transforma en

$$J = \int \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2 t} \cdot 3 \cos t \cdot dt = \int 9 \cos^2 t\, dt$$

que se resuelve mediante la identidad trigonométrica que da $\cos t$ a partir de $\cos 2t$, pues

$$J = 9 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{9}{2}\, t + \frac{9}{4} \operatorname{sen} 2t + C =$$

$$= \frac{9}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + C$$

....

En la integral $K = \int x(3x - 4)^{17}\, dx$ hagamos

$$3x - 4 = v;\ 3\, dx = dv;$$

$$K = \int \frac{v + 4}{3}\, v^{17} \cdot \frac{dv}{3} = \frac{1}{9} \int (v^{18} + 4v^{17})\, dv =$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{v^{19}}{19} + 4\,\frac{v^{18}}{18}\right] + C =$$

$$= \frac{v^{18}}{81 \cdot 19}[9v + 38] + C = \frac{(3x - 4)^{18}\,(27x + 2)}{1539} + C.$$

Naturalmente, puede suceder que una misma integral sea resoluble por distintos procedimientos, y entre ellos diversas sustituciones.

CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL DEFINIDA

Al hacer una sustitución los límites de integración deberán modificarse de acuerdo con el cambio hecho. Si hacemos $x = g(t)$, siendo $a = g(t_1)$, $b = g(t_2)$,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{t1}^{t_2} f\, f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt.$$

• **Ejemplo.** Al hacer $x = 2 \operatorname{sen} t$ es $0 = 2 \operatorname{sen} 0$, $2 = 2 \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2}$, teniéndose

$$\int_0^2 x^3 \sqrt{4 - x^2}\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 8 \cdot \operatorname{sen}^3 t \cdot \sqrt{4 - 4\operatorname{sen}^2 t} \cdot 2 \cos t \cdot dt =$$

$$= 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t \cdot dt =$$

$$= -32\left[\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{64}{15}.$$

Debe prestarse atención al dominio del cambio. Por ejemplo, no puede hacerse $\int_0^3 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ con $x = \operatorname{sen} t$, pues $\operatorname{sen} t$ varía en $[-1, 1]$ y x lo hace en $[0, 3]$.

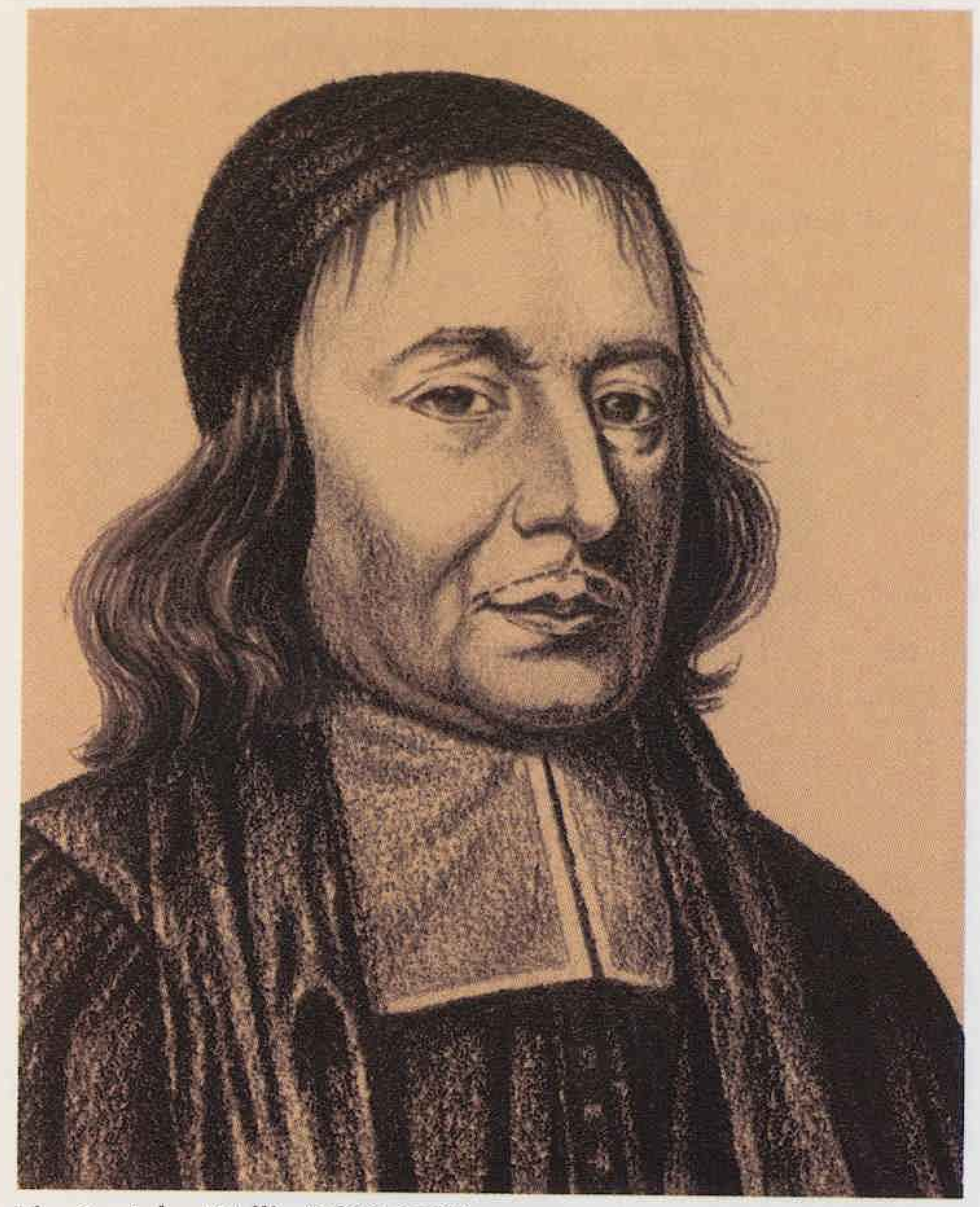


Fig. 1 – John Wallis (1616-1703).

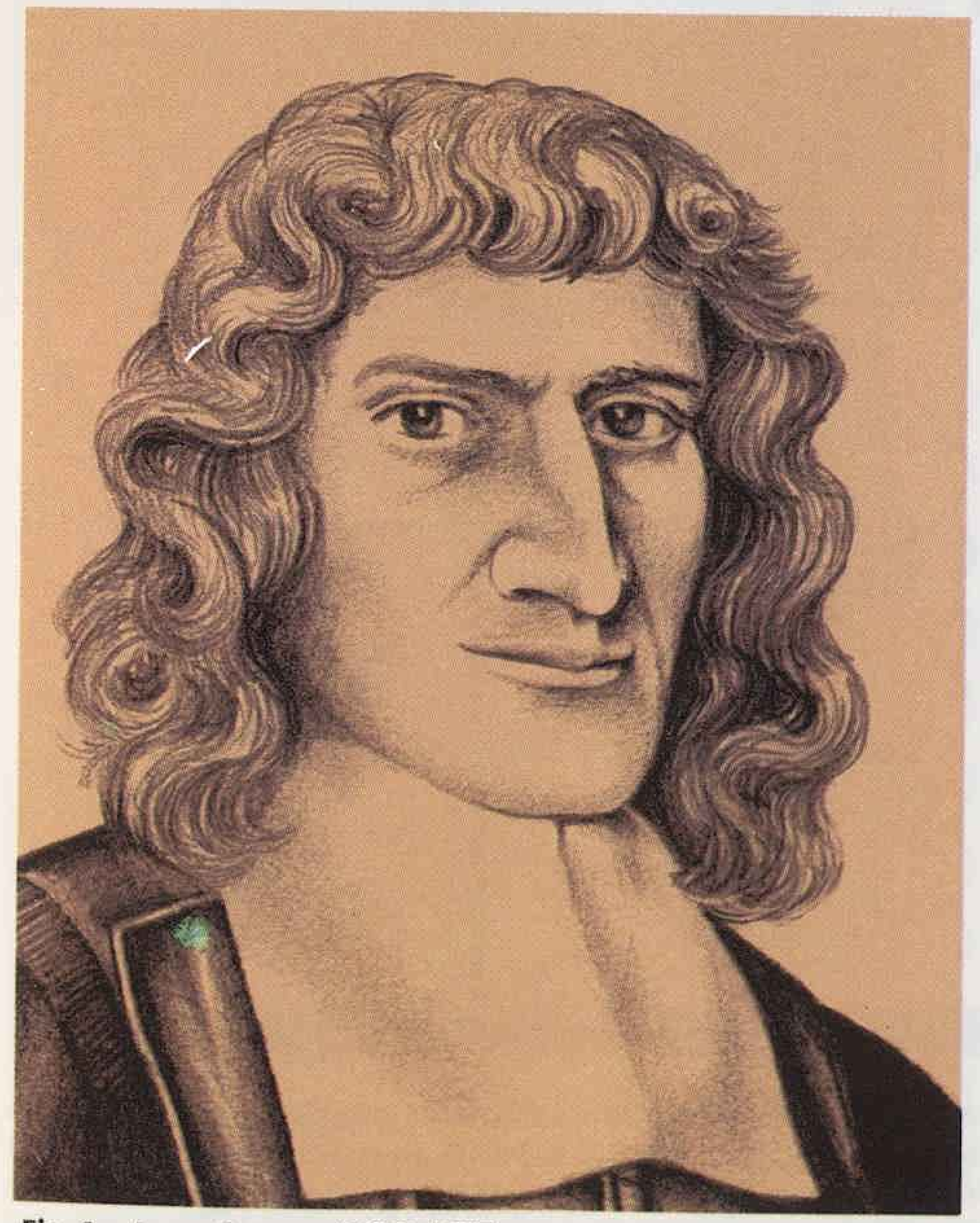


Fig. 2 – Isaac Barrow (1630-1677).

$\int f'(x)\,(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c\ (n \neq 1)$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
$\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + C$
$\int f'(x) \cdot a^{f(x)}\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
$\int f'(x) \operatorname{sen} f(x) \cdot dx = -\cos f(x) + C$
$\int f'(x) \cos f(x) \cdot dx = \operatorname{sen} f(x) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\, dx = \operatorname{tg} f(x) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\operatorname{cotg} f(x) + C$
$\int \frac{f'(x) \cdot \operatorname{sen} f(x)}{\cos^2 f(x)}\, dx = \sec f(x) + C$
$\int \frac{f'(x) \cos^2 f(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}\, dx = -\operatorname{cosec} f(x) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$
$\int \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}\, dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{(f(x))^2 - 1}}\, dx = \operatorname{arcsec} f(x) + C$
$\int f'(x) \cdot \operatorname{sh} f(x) \cdot dx = \operatorname{ch} f(x) + C$
$\int f'(x) \cdot \operatorname{ch} f(x) \cdot dx = \operatorname{sh} f(x) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{ch}^2 f(x)}\, dx = \operatorname{tgh} f(x) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2 + 1}}\, dx = \operatorname{argsh} f(x) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2 - 1}}\, dx = \operatorname{argch} f(x) + C$
$\int \frac{f'(x)}{1 - (f(x))^2}\, dx = \operatorname{argtgh} f(x) + C$

Fig. 3 – Integrales inmediatas.

INTEGRACIÓN POR PARTES

La fórmula de *integración por partes*

$$\int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(dx) \cdot dx$$

puede usarse cuando

(*a*) la función que se desea integrar se pueda concebir como producto, de tal modo que

(*b*) a un factor se le pueda hallar una primitiva, no complicadamente, y

(*c*) tal primitiva y la derivada del otro factor proporcionen una integral más sencilla que la anterior.

- **Ejemplos.**

La integral $A = \int x \cos x \, dx$ puede resolverse haciendo

$$f = x, \; g' = \cos x,$$

con lo que $f' = 1$, $g = \operatorname{sen} x$, y es

$$A = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

....

La integral $B = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ puede resolverse

haciendo

$$f = \ln x, \; g' = 1/\sqrt{x},$$

con lo que $f' = \frac{1}{x}$, $g = 2\sqrt{x}$, siendo

$$B = 2\sqrt{x} \ln x - \int \frac{1}{x} 2\sqrt{x} \, dx =$$

$$= 2\sqrt{x} \ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C.$$

....

La integral $D = \int \frac{x^2}{2^x} dx$ puede solucionarse por partes, haciendo

$$f(x) = x^2, \; g'(x) = \frac{1}{2^x},$$

$$\text{con lo que } f'(x) = 2x, \; g(x) = \frac{-1}{2^x \cdot \ln 2},$$

$$D = \frac{-x^2}{2^x \cdot \ln 2} + \frac{2}{\ln 2} \int \frac{x}{2^x} dx.$$

Resolviendo esta nueva integral por partes

$$f_1(x) = x, \; g'_1(x) = \frac{1}{2^x},$$

$$f'_1(x) = 1, \; g(x) = \frac{1}{2^x \ln 2};$$

$$D = \frac{-x^2}{2^x \ln x} - \frac{2x}{2^x \cdot \ln^2 2} + \frac{2}{\ln^2 2} \int \frac{1}{2^x} dx =$$

$$= \frac{-x^2}{2^x \ln 2} - \frac{2x}{2^x \cdot \ln^2 2} - \frac{2}{2^x \ln^3 2} + C.$$

....

Cuando una función que se desea integrar tiene derivada sencilla es a veces conveniente integrar por partes, usando como segundo factor un 1. Por ejemplo, la integral

$$\int \ln x \, dx$$

se resuelve haciendo

$$f(x) = \ln x, \; g'(x) = 1$$

con lo que $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ y será

$$E = x \ln x - \int 1 \cdot dx = x \ln x - x + C.$$

....

En algunas ocasiones la aplicación reiterada del método conduce a ecuaciones en la integral que se busca. Por ejemplo, en

$$F = \int \operatorname{sen} \ln x \cdot dx$$

$$f(x) = \operatorname{sen} \ln x, \; g'(x) = 1, \; f'(x) = \frac{1}{x} \cos \ln x,$$

$$g(x) = x;$$

$$F = x \operatorname{sen} \ln x - \int \cos \ln x \, dx$$

y si para esta última ponemos

$$f_1(x) = \cos \ln x, \; g'_1(x) = 1,$$

$$f'_1(x) = -\frac{1}{x} \operatorname{sen} \ln x, \; g_1(x) = x,$$

llegamos a

$$F = x \operatorname{sen} \ln x - x \cos \ln x - \int \operatorname{sen} \ln x \, dx,$$

por lo que

$$\int \operatorname{sen} \ln x \, dx = \frac{x \operatorname{sen} \ln x - x \cos \ln x}{2} + C.$$

....

La integral $\int_0^1 x \operatorname{arcsen} x \, dx$ puede resolverse haciendo

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x, \; g'(x) = x,$$

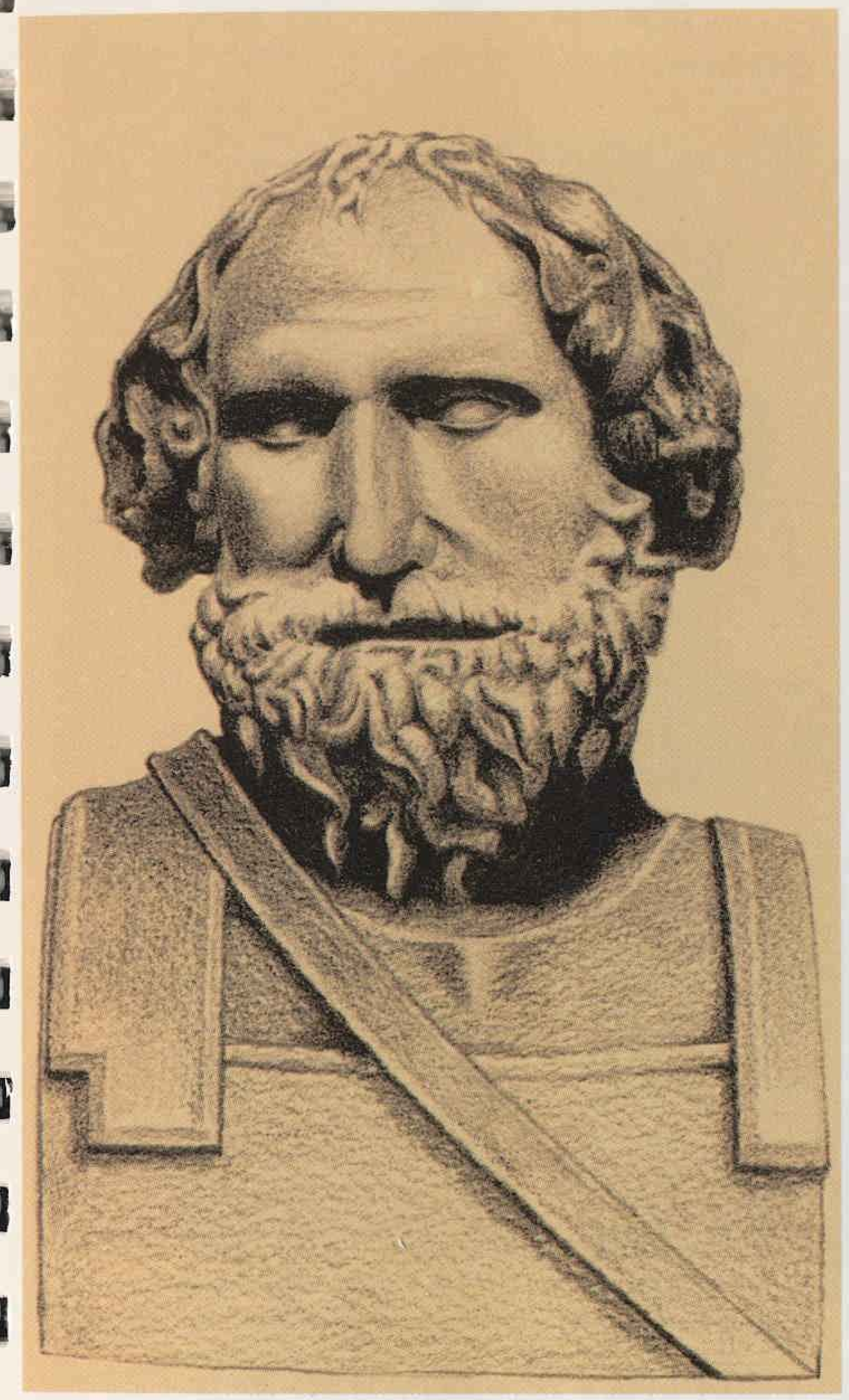
con lo $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$,

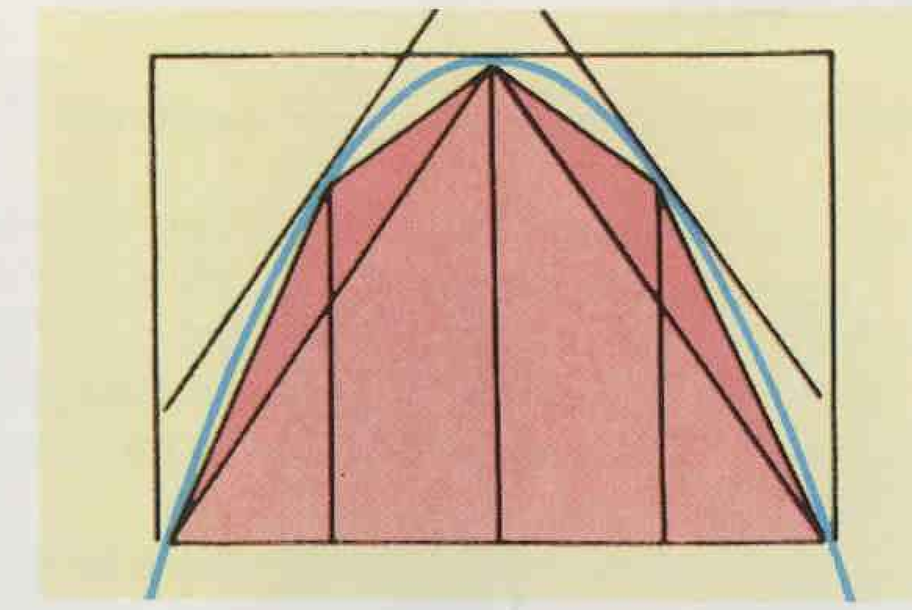
$$G = \left[\frac{x^2 \operatorname{arcsen} x}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} (-\operatorname{sen} t \, dt)$$

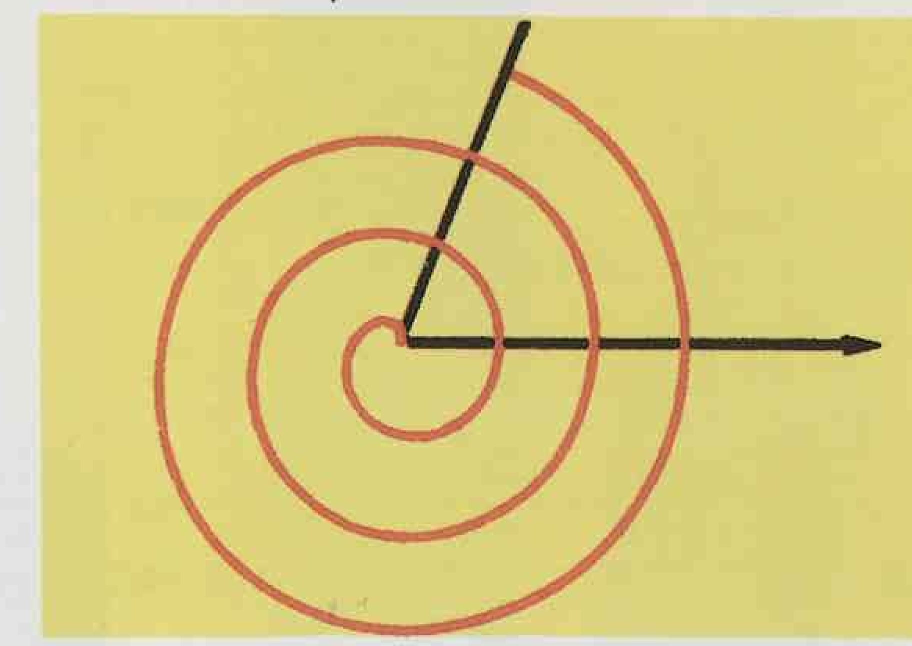
(tras haber hecho el cambio $x = \cos t$ en la última integral),

$$G = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{\pi}{8}$$



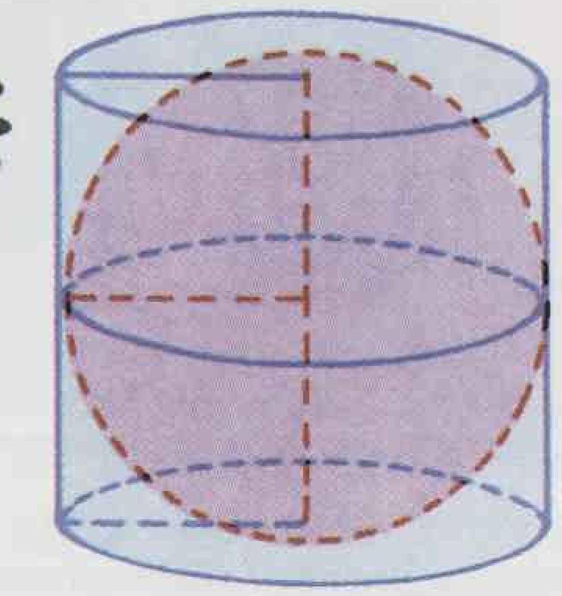


Cuadratura de la parábola

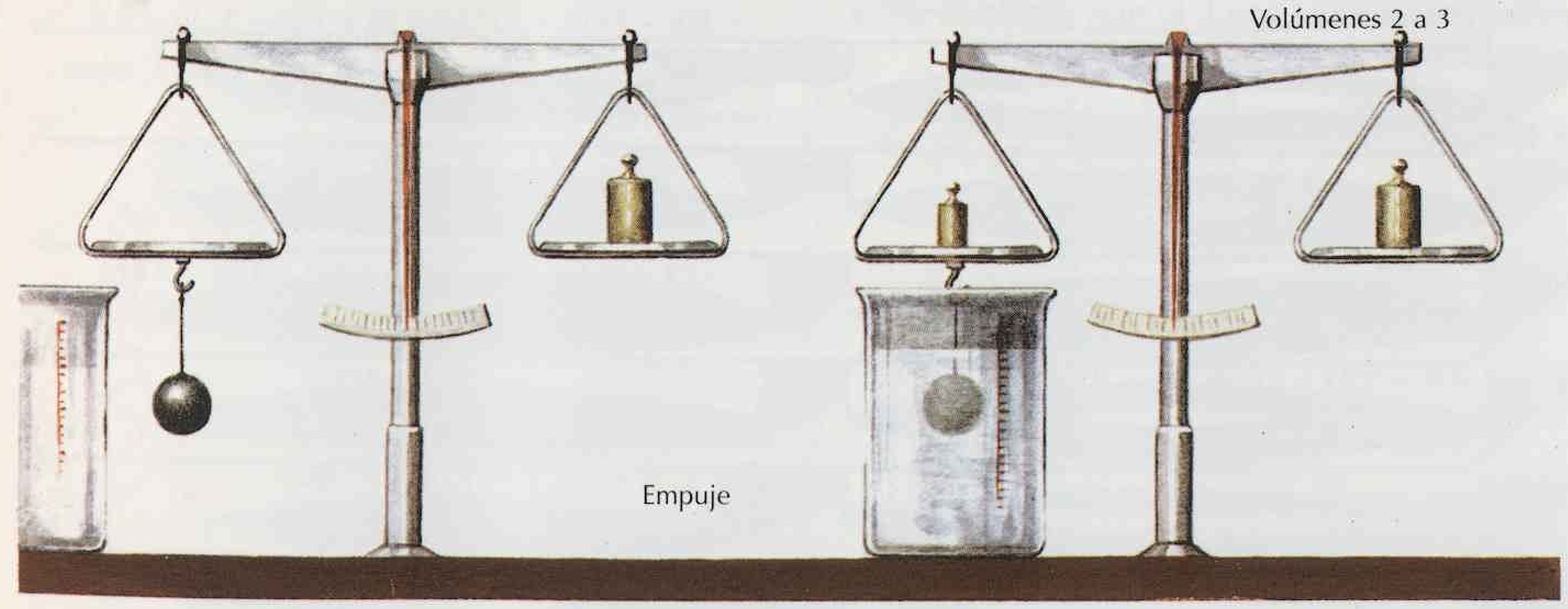


Espiral de Arquímedes

Rueda dentada



Volúmenes 2 a 3



Arquímedes (287-216 a.C.), uno de los mayores sabios de la humanidad, precursor del cálculo integral (método de exhaución), descubridor, entre otras cosas, de la Ley de la Palanca, del Principio de Empuje, de los volúmenes de los sólidos de rotación, inventor del tornillo sin fin, y de la rueda dentada. Se mostraba tan satisfecho de haber establecido la proporción de volumen entre una esfera y un cilindro circunscrito que la hizo esculpir en su tumba, posteriormente descubierta por Cicerón.

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Resolveremos la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ donde P y Q son polinomios. Supondremos que el grado de P es estrictamente inferior al de Q (si no, dividiendo, $P(x) = Q(x) \cdot c(x) + R(x)$ y $\int P/Q = \int c + \int R/Q$) y que el coeficiente de mayor grado de Q es 1 (si no, se le saca de factor común fuera de la integral).

Caso I. Las raíces de $Q(x)$ son reales y simples:

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n).$$

Pongamos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$,

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son coeficientes indeterminados; tras hallarlos, será

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{x - a_1}\,dx + \ldots + \int \frac{A_n}{x - a_n}\,dx =$$
$$= A_1 \ln|x - a_1| + \ldots + A_n \ln|x - a_n| + C.$$

Para encontrar $A_1, \ldots, A_n$, al sumar las fracciones se obtiene

$$P(x) = A_1(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) +$$
$$+ A_2(x - a_1)(x - a_3) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) + \ldots +$$
$$+ A_n(x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_{n-1}),$$

pudiéndose igualar cada coeficiente de $P(x)$ con el del mismo grado del polinomio de la derecha, efectuando previamente los productos y sumas indicados. También es posible dar a x, en ambos miembros de la igualdad, tantos valores como coeficientes haya que determinar, obteniéndose nuevamente un sistema. Sin embargo, en este Caso **I**, lo más rápido es dar a x los valores $a_1, \ldots, a_n$.

• **Ejemplo.** Hallar $I = \int \frac{4x^2 - 12x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\,dx$.

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2),$$

$$\frac{4x^2 - 12x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x + 2},$$

$$4x^2 - 12x - 10 = A(x - 3)(x + 2) +$$
$$+ B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)(x - 3).$$

Haciendo sucesivamente $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$, obtenemos, $-18 = -6A$, $-10 = 10B$, $30 = 15C$ o sea $A = 3$, $B = -1$, $C = 2$, por lo que

$$I = 3\ln|x - 1| - \ln|x - 3| + 2\ln|x + 2| + C$$

Caso II. Las raíces de $Q(x)$ son reales, pero algunas son múltiples:

$$Q(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_r)^{m_r}.$$

Pondremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x - a_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x - a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,m_1}}{(x - a_1)^{m_1}} +$$
$$+ \frac{A_{2,1}}{(x - a_2)} + \frac{A_{2,2}}{(x - a_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2,m_2}}{(x - a_2)^{m_2}} +$$
$$+ \ldots +$$
$$+ \frac{A_{r,1}}{(x - a_r)} + \frac{A_{r,2}}{(x - a_r)^2} + \ldots + \frac{A_{r,m_r}}{(x - a_r)^{m_r}},$$

una vez hallados los coeficientes indeterminados $A_{i,j}$ bastará tener en cuenta que si $m \neq 1$

$$\int \frac{A}{(x - a)^m}\,dx = \frac{A}{(1 - m)(x - a)^{m-1}} + C$$

• **Ejemplo.** Resolver

$$J = \int \frac{3x^5 - 2x^4 - 23x^3 + 3x^2 + 72x + 28}{x^6 + x^5 - 10x^4 - 8x^3 + 32x^2 + 16x - 32}\,dx$$

El denominador se descompone en $(x - 1)(x - 2)^2(x + 2)^3$ por lo que escribiremos

$$\frac{3x^5 - 2x^4 - 23x^3 + 3x^2 + 72x + 28}{x^6 + x^5 - 10x^4 - 8x^3 + 32x^2 + 16x - 32} = \frac{A}{x - 1} +$$
$$+ \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2} + \frac{D}{(x + 2)} + \frac{E}{(x + 2)^2} + \frac{F}{(x + 2)^3}.$$

Efectuando la suma de fracciones e igualando numeradores, tendremos

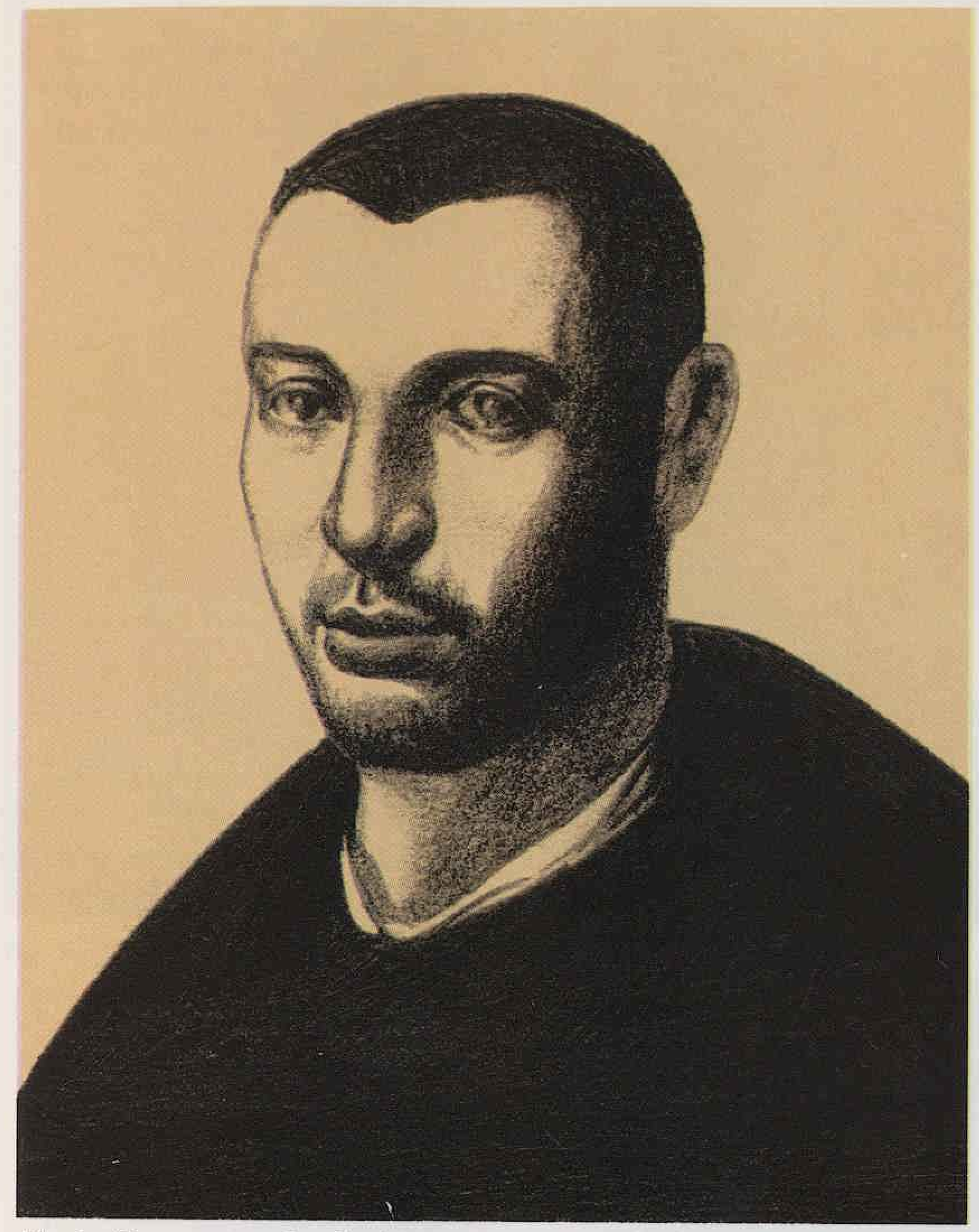
$$3x^5 - 2x^4 - 23x^3 + 3x^2 + 72x + 28 =$$
$$= A(x - 2)^2(x + 2)^3 + B(x - 1)(x - 2)(x + 2)^3 +$$
$$+ C(x - 1)(x + 2)^3 + D(x - 1)(x - 2)^2(x + 2)^2 +$$
$$+ E(x - 1)(x - 2)^2(x + 2) + F(x - 1)(x - 2)^2.$$

Dando a x los valores 1, 2, –2, 0, –1, –3, obtenemos, respectivamente,

$$81 = 27A,\ 64 = 64C,\ -48 = -48F,$$
$$28 = 32A + 16B - 8C - 16D - 8E - 4F,$$
$$-23 = 9A - 6B - 2C - 18D - 18E - 18F,$$
$$-427 = -25A - 20B + 4C + 100D +$$
$$+ 100E - 100F.$$

sistema cuya solución es $A = 3$, $B = -2$, $C = 1$, $D = 2$, $E = -1$, $F = 1$, por lo que

$$J = 3\ln|x - 1| - 2\ln|x - 2| - \frac{1}{(x - 2)^2} +$$
$$+ 2\ln|x + 2| + \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{2(x + 2)^2} + C$$



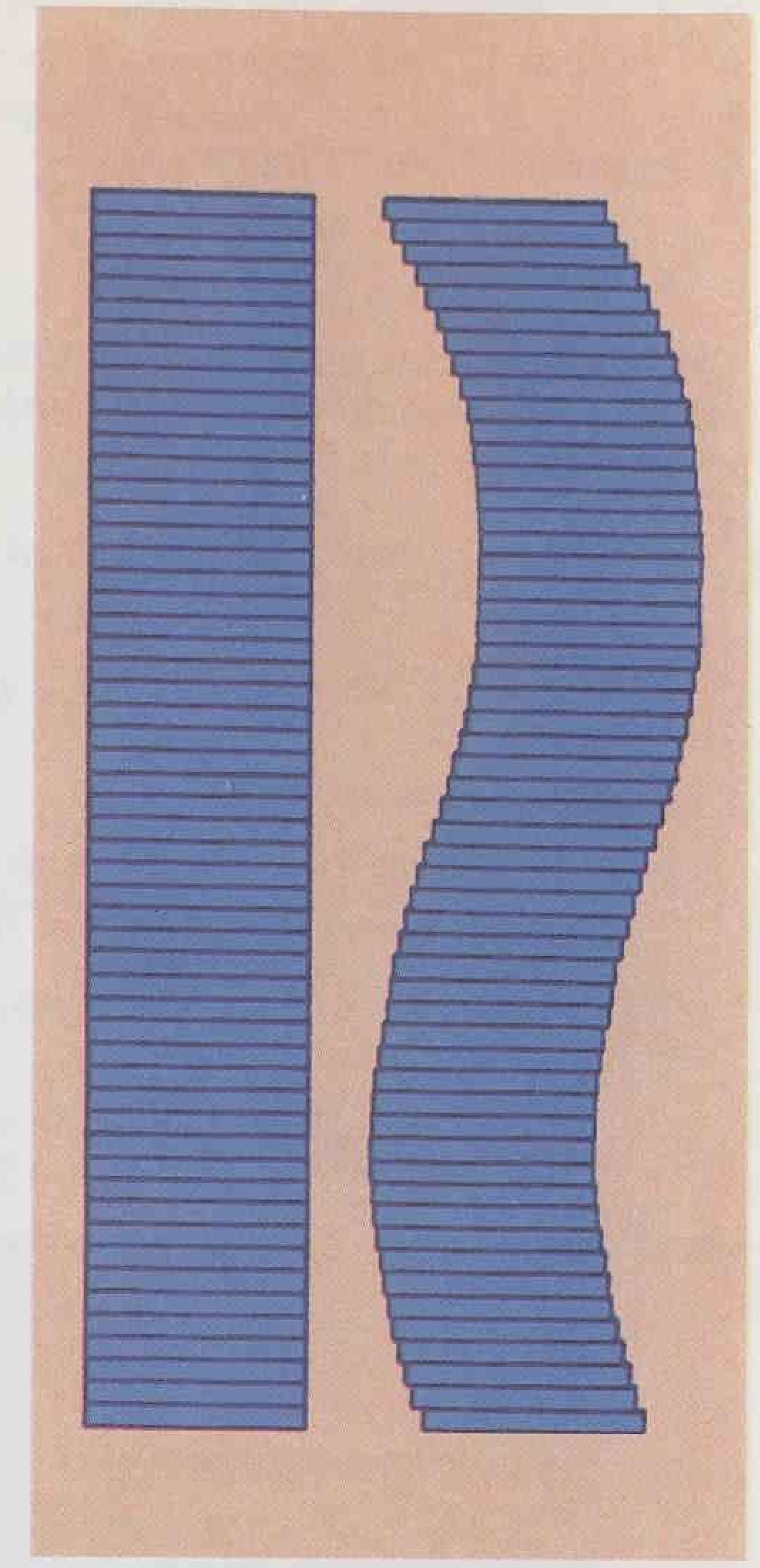


Fig. 1 – Bonaventura Cavalieri (1598-1647) enunció el principio según el cual tienen igual volumen sólidos cuyas secciones por cada plano de una familia de planos paralelos tengan igual área.

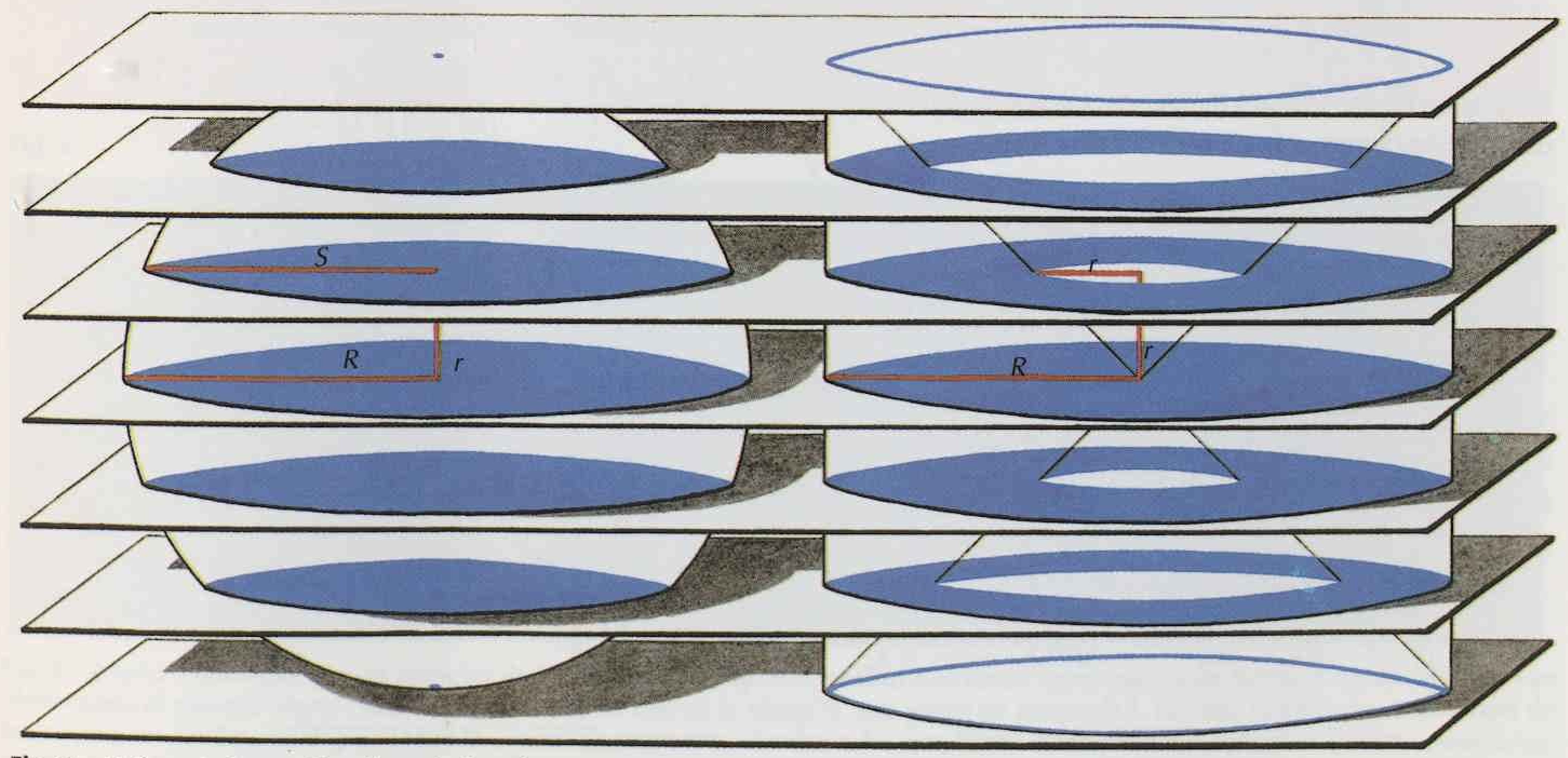


Fig. 2 – El área de la sección plana de la esfera es la misma que la de la corona circular, sección del cilindro privado del cono interior, pues : $\pi S^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi R^2 - \pi r^2$. Por lo tanto, el volumen de la esfera es el del cilindro completo menos el del cono, es decir: $\pi R^2 \cdot 2R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2R = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Caso III. $Q(x)$ tiene algunas raíces imaginarias, pero simples.

Si $a + bi$ es una de tales raíces, también lo es $a - bi$, por lo que producen un factor primo $((x-a)^2 + b^2)$ $(b \neq 0)$ en la descomposición; a tal factor se le asocia una fracción

$$\frac{Mx + N}{(x-a)^2 + b^2},$$

que se añade a las descritas en el Caso **II**, siendo M y N coeficientes indeterminados, Para integrar se aplica la fórmula

$$\int \frac{Mx + N}{(x - a^2) + b^2}\, dx = \frac{M}{2} \ln ((x-a)^2 + b^2) +$$

$$+ \frac{Ma + N}{b} \operatorname{arctg} \frac{x - a}{b} + C$$

- **Ejemplo.** Hallar la integral

$$K = \int \frac{8x^3 - 47x^2 + 129x - 170}{x^4 - 9x^3 + 39x^2 - 89x + 78}\, dx.$$

Halladas por el método de Ruffini las raíces 2 y 3 del denominador, se tiene

$$x^4 - 9x^3 + 39x^2 - 89x + 78 =$$
$$= (x-2)(x-3)(x^2 - 4x + 13)$$

siendo las raíces de este último factor

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = 2 \pm 3i$$

por lo que la descomposición será

$$\frac{8x^3 - 47x^2 + 129x - 170}{x^4 - 9x^3 + 39x^2 - 89x + 78} =$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{Cx + D}{(x-2)^2 + 3^2}.$$

Efectuando la suma de fracciones e igualando denominadores, obtenemos

$$8x^3 - 47x^2 + 129x - 170 =$$
$$= A(x-3)(x^2 - 4x + 3) +$$
$$+ B(x-2)(x^2 - 4x + 13) +$$
$$+ (Cx + D)(x-2)(x-3) =$$
$$= (A + B + C)x^3 + (-7A - 6B - 5C + D)x^2 +$$
$$+ (25A + 21B + 6C - 5D)x + (-39A - 26B + 6D).$$

Igualando coeficientes se halla un sistema cuya solución es $A = 4$, $B = 1$, $C = 3$, $D = 2$, con lo que tendremos

$$K = 4 \ln|x-2| + \ln|x-3| +$$

$$+ \frac{3}{2} \ln (x^2 - 4x + 13) + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C$$

Caso IV. $Q(x)$ presenta alguna raíz imaginaria múltiple.

Aunque es posible utilizar un procedimiento semejante al del Caso **II**, es preferible aplicar directamente el llamado Método de Hermite (que, por otra parte, puede usarse también en los casos **II** y **III**). Si

$$Q(x) = (x - c_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - c_r)^{m_r} \cdot$$
$$\cdot \left[(x - a_1)^2 + b_1^2\right]^{n_1} \cdot \ldots \cdot \left[(x - a_s)^2 + b_s^2\right]^{n_s}.$$

designemos

$$Q_1(x) = (x - c_1)^{m_1 - 1} \cdot \ldots \cdot (x - c_r)^{m_r - 1}.$$
$$\cdot \left[(x - a_1)^2 + b_1^2\right]^{n_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \left[(x - a_s)^2 + b_s^2\right]^{n_s - 1}.$$

Poniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right]' + \frac{C_1}{x - a_1} + \ldots + \frac{C_1}{x - a_r} +$$

$$+ \frac{A_1 x + B_1}{(x - a_1)^2 + b_1^2} + \ldots + \frac{A_s x + B_s}{(x - a_s)^2 + b_s^2},$$

donde $P_1(x)$ es un polinomio de coeficientes indeterminados de grado inferior en una unidad de $Q_1(x)$; bastará hallar los coeficientes por los métodos ya descritos e integrar término a término.

- **Ejemplo.**

Resolver la integral indefinida W de la función

$$\frac{x^8 - 6x^7 + 6x^6 - 12x^5 - 12x^4 + 27x^3 - 31x^2 + 6x + 5}{(x^2+1)^3 (x+2)^2 (x-1)}$$

La fracción racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ que deseamos integrar, la descompondremos de la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \left[\frac{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}{(x^2+1)^2 (x-2)}\right]' +$$

$$+ \frac{F}{x-1} + \frac{G}{x-2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}.$$

Una vez efectuada la derivada, se suman las fracciones; igualando numeradores se obtiene un sistema de ecuaciones en los coeficientes cuyas soluciones son $A = 1$, $B = C = D = 0$, $E = -1$, $F = 2$, $G = -1$, $M = 3$, $N = 2$, por lo que

$$W = \frac{x^4 - 1}{(x^2+1)^2 (x-2)} + 2 \ln|x-1| - \ln|x-2| +$$

$$+ \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x + C.$$

Fig. 1 – Johannes Kepler (1571-1630).

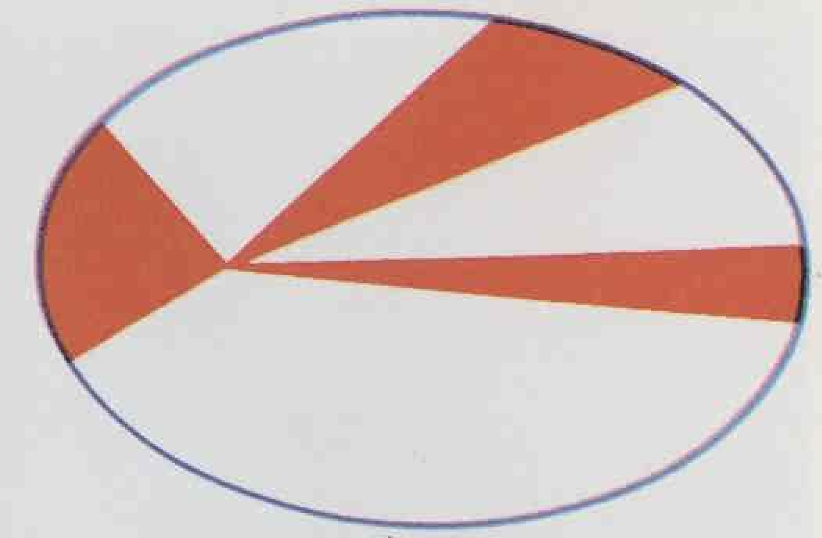


Fig. 2.

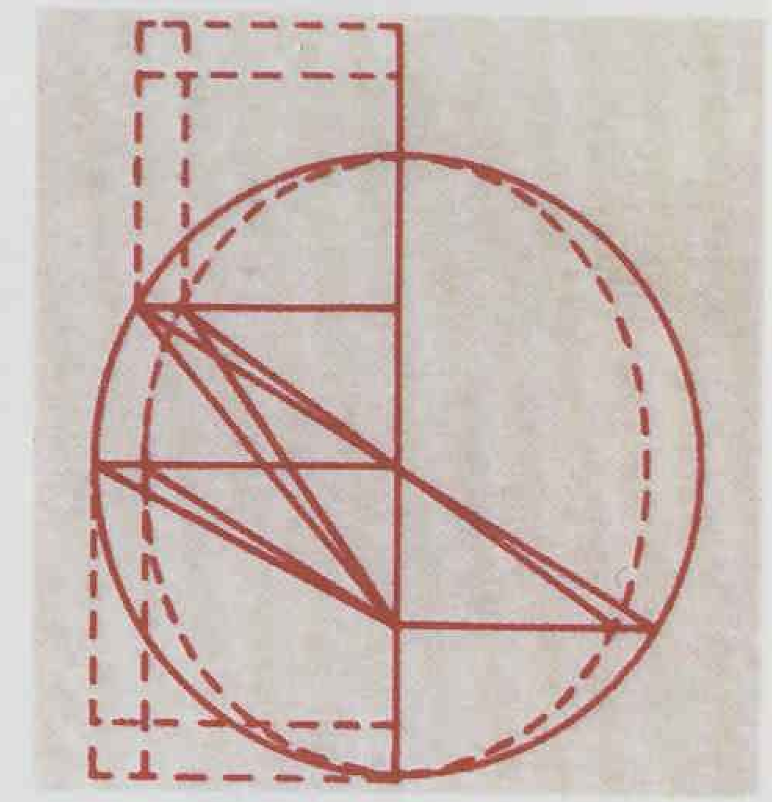


Fig. 3.

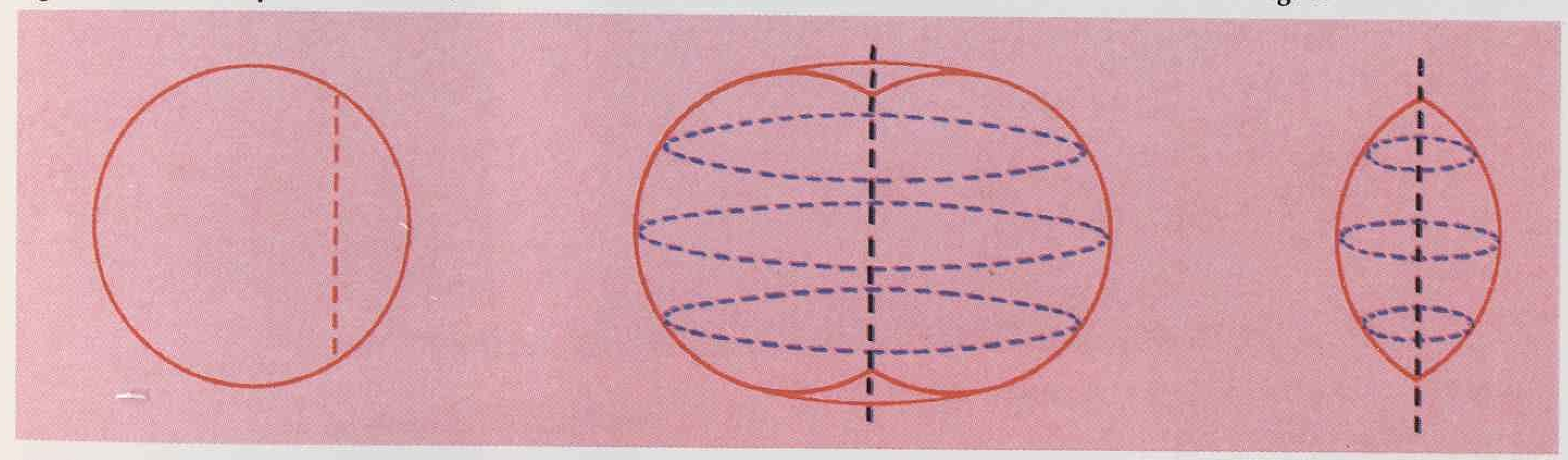


Fig. 4.

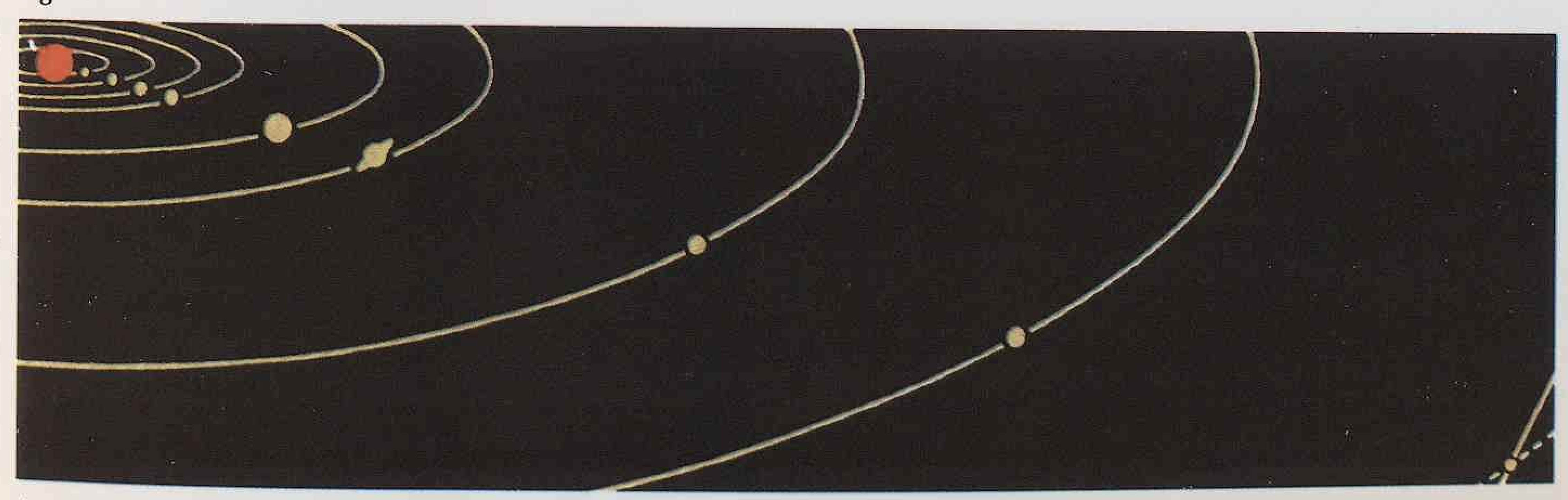


Fig. 5 – Kepler estableció que los planetas describen órbitas elípticas (arriba) barriendo áreas iguales en tiempos iguales (fig. 2). Fue observando el planeta Marte como descubrió (fig. 3) que es la elipse la que posee tal propiedad. Estudió también los volúmenes de los cuerpos engendrados al girar sobre la cuerda un segmento circular, a los que llamó citriformes o meliformes (limón y manzana), según girase la porción menor o la mayor (fig. 4).

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

I. Para resolver integrales de las formas $\int \text{sen}\, ax \cdot \cos bx \cdot dx$, $\int \text{sen}\, ax \cdot \text{sen}\, bx \cdot dx$ y $\int \cos ax \cdot \cos bx \cdot dx$, se utilizan las fórmulas

$$\text{sen}ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\text{sen}\,(a+b)\,x + \text{sen}\,(a-b)\,x),$$

$$\text{sen}ax \cdot \text{sen}bx = \frac{1}{2}(\cos\,(a-b)\,x - \cos\,(a+b)\,x),$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\cos\,(a+b)\,x + \cos\,(a-b)\,x).$$

- **Ejemplo.**

$$\int \text{sen}7x \cdot \text{sen}3x\, dx = \int \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\,\text{sen}4x - \frac{1}{20}\,\text{sen}10x + C$$

II. Para resolver integrales de la forma

$$\int R(\text{sen}x, \cos x) dx,$$

donde R (sen$x$, cos$x$) es una función racional (es decir, cociente de polinomios en las variables sen$x$ y cos$x$), se utiliza el cambio

$$t = \text{tg}\,\frac{x}{2} \text{ (o sea, } x = 2 \text{ arctg}t)$$

con lo que

$$\text{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}, \; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \; dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

transformándose la integral anterior en una racional en la variable t.

•Ejemplos. La integral $J = \int \frac{\text{sen}x}{1-\text{sen}x} dx$ haciendo $t = \text{tg}\,\frac{x}{2}$ tg se transforma en

$$J = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{4t}{(t-1)^2\,(t+1)} dt,$$

racional que se resuelve según vimos en F/5-F/6, siendo

$$J = \int \left(\frac{2}{(t-1)^2} - \frac{2}{t^2+1}\right) dt = \frac{-2}{t-1} - 2\text{arctg}t + C =$$

$$= -\frac{2}{\text{tg}\frac{x}{2} - 1} - x + C.$$

....

La integral $I = \int \frac{1}{2+3\,\text{sen}x + 2\cos x} dx$ mediante el cambio $t = \text{tg}\,\frac{x}{2}$ se transforma en

$$I = \int \frac{1}{1+3t} dt = \frac{1}{3}\ln|1+3t| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|1 + 3\,\text{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C$$

Este método general conduce frecuentemente a cálculos engorrosos. Veamos a continuación algunas alternativas para ciertos casos singulares.

III. Si $R(\text{sen}x, \cos x) = R(-\text{sen}x, -\cos x)$, puede hacerse el cambio

$$y = \text{tg}x \text{ (o sea, } x = \text{arctg}y)$$

con lo que

$$\text{sen}x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \; \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \; dx = \frac{dy}{1+y^2}$$

- **Ejemplo.**

La integral

$$L = \int \frac{1}{\text{sen}^2 x + 3\text{sen}x \cos x - 4\cos^2 x} dx$$

se transforma, haciendo $t = \text{tg}\,\frac{x}{2}$, en

$$L = \int \frac{t^2+1}{-2t^4 - 3t^3 + 6t^2 + 3t - 2} dt$$

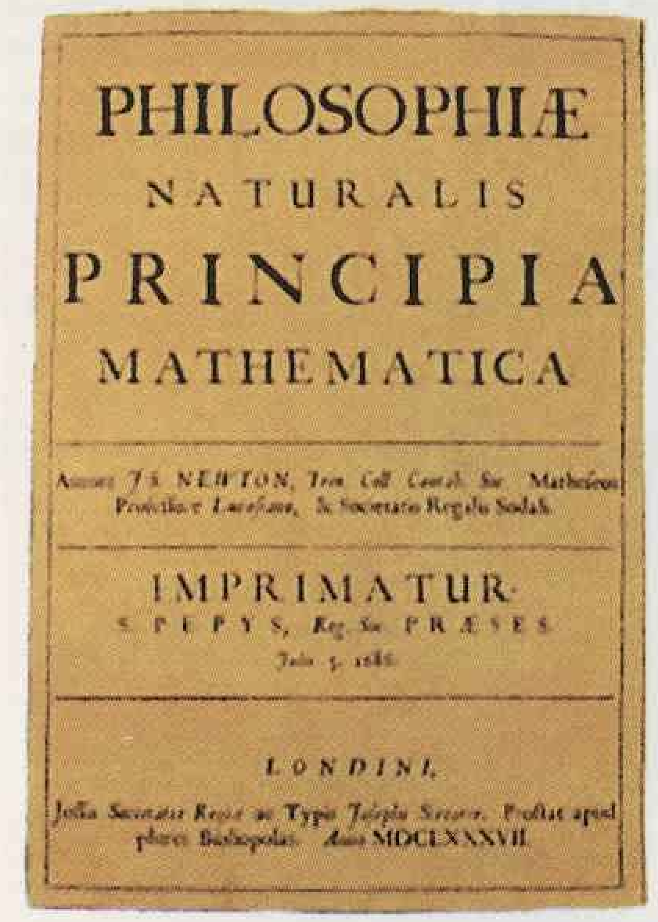
mientras que al hacer $y = \text{tg}x$ es

$$L = \int \frac{1}{\frac{y^2}{1+y^2} + \frac{3y}{1+y^2} - \frac{4}{1+y^2}} \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \int \frac{dy}{y^2+3y-4} = \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{y-1} - \frac{\frac{1}{5}}{y+4}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{5}(\ln|y-1| - \ln|y+4|) + C =$$

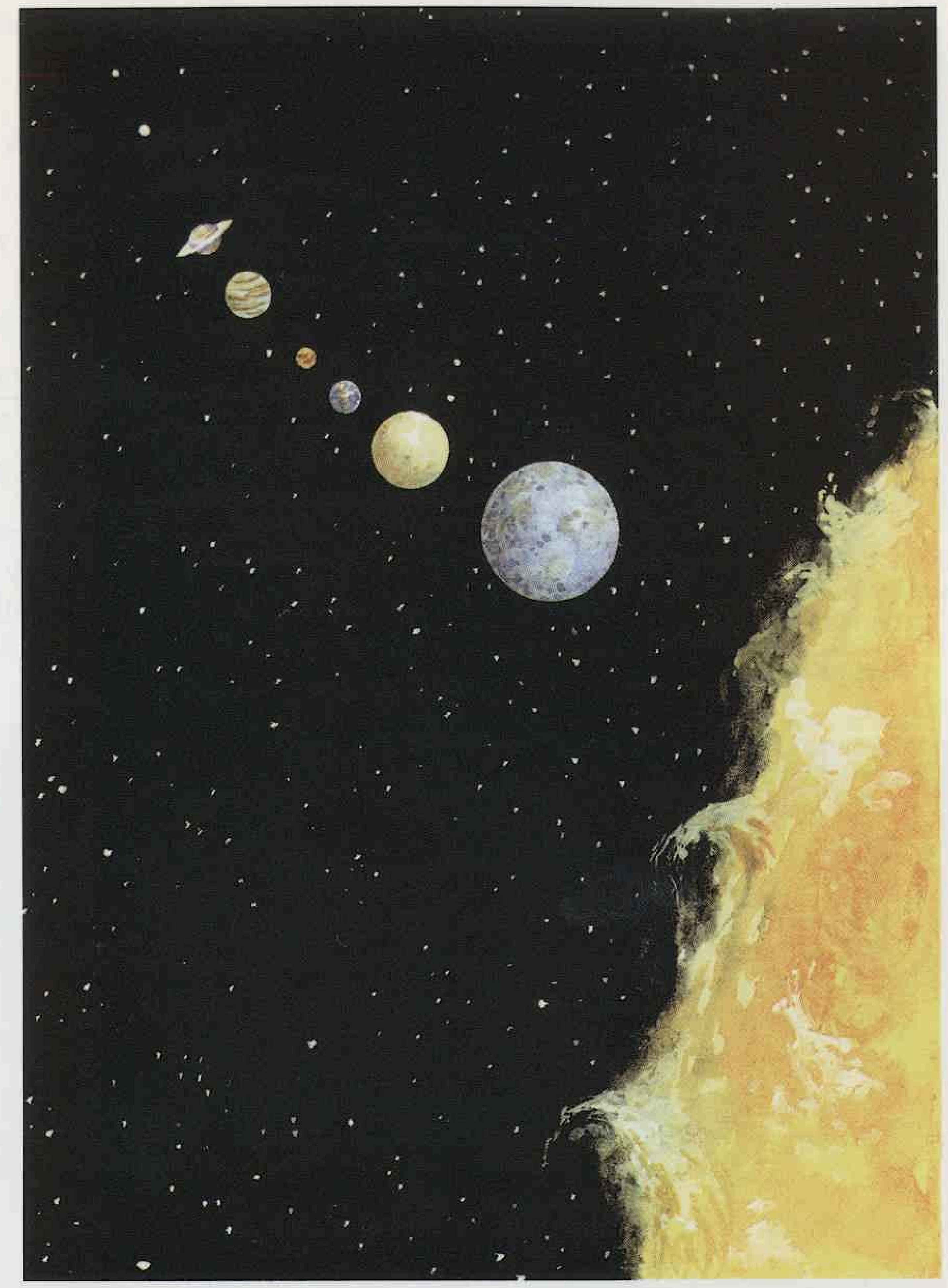
$$= \frac{1}{5}(\ln|\text{tg}x - 1| - \ln|\text{tg}x + 4|) + C =$$


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

IMPRIMATUR

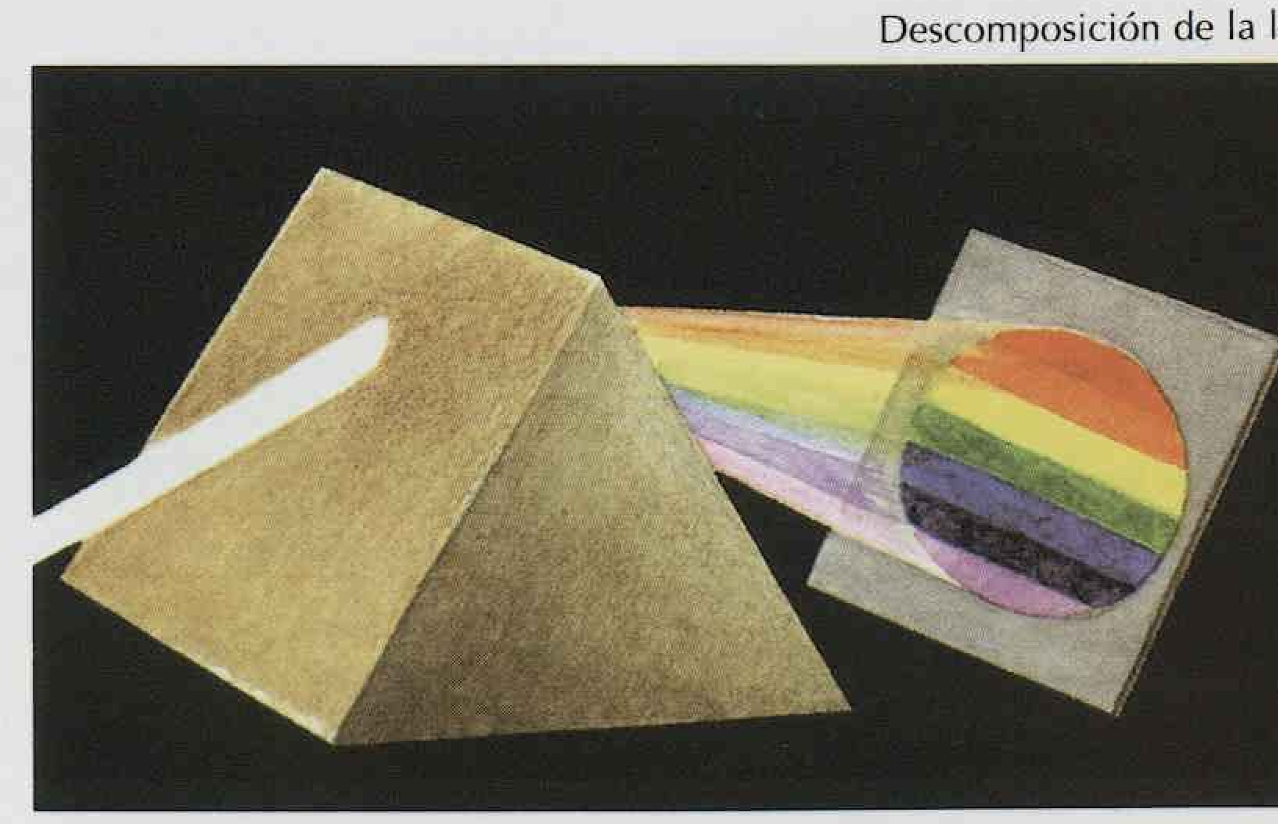
LONDINI,

Portada de *Principios Matemáticos de Filosofía Natural.*



Sistema solar

Descomposición de la luz



Isaac Newton (1642-1727), uno de los mayores genios de todos los tiempos, fue el creador (con Leibniz) del cálculo infinitesimal y descubridor de la naturaleza de la luz y de la Ley de la gravitación universal. Sus *Principios Matemáticos de Filosofía Natural* han fundamentado la ciencia moderna y sus métodos.

IV. Si $m, n \in \mathbf{Z}$, pongamos

$$I_{m,n} = \int \mathrm{sen}^m x \cdot \cos^n x \cdot dx$$

Esta integral se resuelve, en general, mediante recurrencia sobre m y n (*fórmulas de reducción*), lo que se obtiene integrando por partes o por métodos más singularizados, como los que se expondrán tras un primer ejemplo.

- **Ejemplo.** $I_{m,o} = I_m = \int \mathrm{sen}^m x\, dx$ $(m > 2)$, al hacer $f(x) = \mathrm{sen}^{m-1} x$, $g'(x) = \mathrm{sen} x$, $\cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x$ nos da

$$I_m = [(m-1)\, I_{m-2} - \cos x \cdot \mathrm{sen}^{m-1} x]/m.$$

IV a. Cuando m (o n) es impar positivo, por ejemplo, $n = 2k + 1$, será $\cos^{2k+1} x = (1 - \mathrm{sen}^2 x)^k \cdot \cos x$ por lo que el cambio $t = \mathrm{sen} x$ racionaliza la integral ($\cos x = y$ si m es impar).

- **Ejemplo.**

$$\int \mathrm{sen}^8 x \cdot \cos^3 x\, dx = \int \mathrm{sen}^8 x \cdot (1 - \mathrm{sen}^2 x) \cdot \cos x \cdot dx =$$
$$= \int t^8 (1 - t^2)\, dt = (t^9/9) - (t^{11}/11) + C =$$
$$= \frac{\mathrm{sen}^9 x}{9} - \frac{\mathrm{sen}^{11} x}{11} + C$$

IV b. Cuando m y n son pares positivos, se suelen usar las fórmulas

$$\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2, \quad \mathrm{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$$
$$\mathrm{sen} x \cdot \cos x = (\mathrm{sen} 2x)/2$$

- **Ejemplo.**

$$\int \mathrm{sen}^4 x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx =$$
$$= \frac{x}{8} - \frac{\mathrm{sen} 2x}{16} - \frac{x}{16} - \frac{\mathrm{sen} 4x}{16} + \frac{\mathrm{sen}^3 2x}{48} + C.$$

(Usando IV b en el tercer sumando y IV a en el cuarto).

IV c. Si m y n son ambos pares negativos, o ambos impares negativos, se usa directamente $y = \mathrm{tg} x$ (véase final de la serie F/7).

IV d. Si m y n son pares de signo opuesto se hace $y = \mathrm{tg} x$, o, eventualmente, se usa en el numerador $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y luego $y = \mathrm{tg} x$.

IV e. $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{sen}^{2k+1} x}$ y $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}$

Tras hacer $1 = \mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x$ en el numerador por partes se obtiene una fórmula de reducción.

- **Ejemplo.** $\displaystyle J_5 = \int \frac{dx}{\mathrm{sen}^5 x} = \int \frac{\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x}{\mathrm{sen}^5 x}\, dx =$

$$= J_3 + \int \cos x \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^5 x} \cdot dx =$$

con lo que, integrando por partes,

$$J_5 = J_3 + \frac{\cos x}{4\mathrm{sen}^4 x} + \frac{1}{4} J_3 = \frac{\cos x}{4\mathrm{sen}^4 x} + \frac{5}{4} J_3,$$

pudiéndose proseguir la reducción.

IV f. Si m y n son uno par positivo y el otro impar negativo, se utiliza en el numerador $1 = \mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x$ para pasar a tipos anteriores.

- **Ejemplo.**

$$\int \frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos^5 x}\, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^5 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^5 x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x},$$

resolviéndose éstas según IV e.

IV g. Si m y n son negativos y de paridad opuesta, se pone en el numerador $1 = (\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x)^k$ de modo que $2k$ exceda o iguale el grado de $\mathrm{sen} x$ y $\cos x$ en el denominador.

- **Ejemplo.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{sen}^2 x \cdot \cos^3 x} = \int \frac{(\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x)^2}{\mathrm{sen}^2 x \cdot \cos^3 x}\, dx$

$$= \int \left(\frac{\cos x}{\mathrm{sen}^2 x} + \frac{2}{\cos x} + \frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos^3 x}\right) dx$$

que proporcionan tipos ya conocidos.

V. $\int \mathrm{tg}^n x\, dx$ y $\int \mathrm{cotg}^n x \cdot dx$ son inmediatas para $n = 1, 2$, y si $n > 2$. se separa del integrando

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \qquad \mathrm{cotg}^2 x = \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x} - 1$$

obteniéndose grado inferior.

- **Ejemplo.** $\displaystyle\int \mathrm{tg}^4 x \cdot dx = \int \mathrm{tg}^2 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$

$$\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \int \mathrm{tg}^2 x\, dx = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg} x - x + C.$$

(reiterando el procedimiento).

Fig. 1 – Gottfried W. Leibniz (1646-1716) formuló, al propio tiempo que lo hacía Newton, los principios del cálculo infinitesimal.

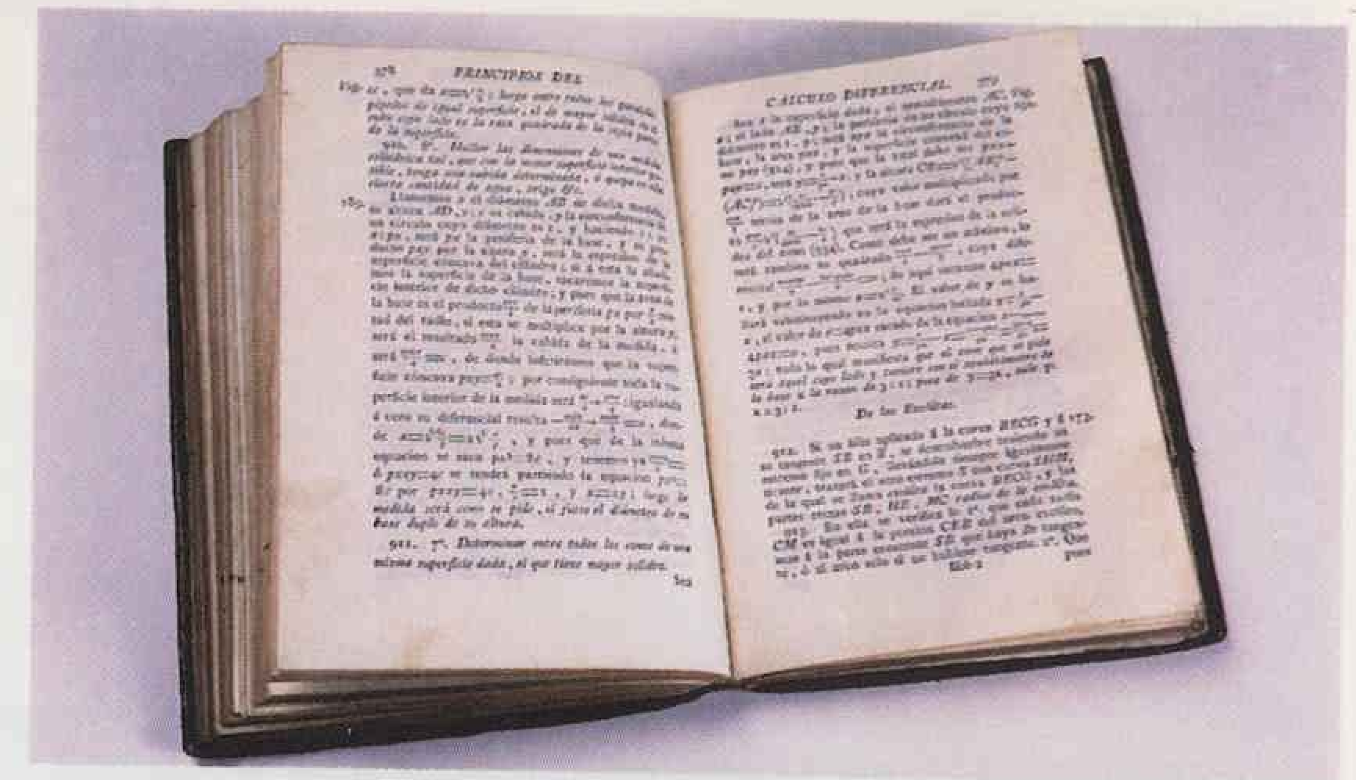


Fig. 2 – Muchas de nuestras notaciones actuales, como dx o S (luego $\int$), provienen de Leibniz. En la foto, una obra española de 1782 sobre los principios del cálculo diferencial.

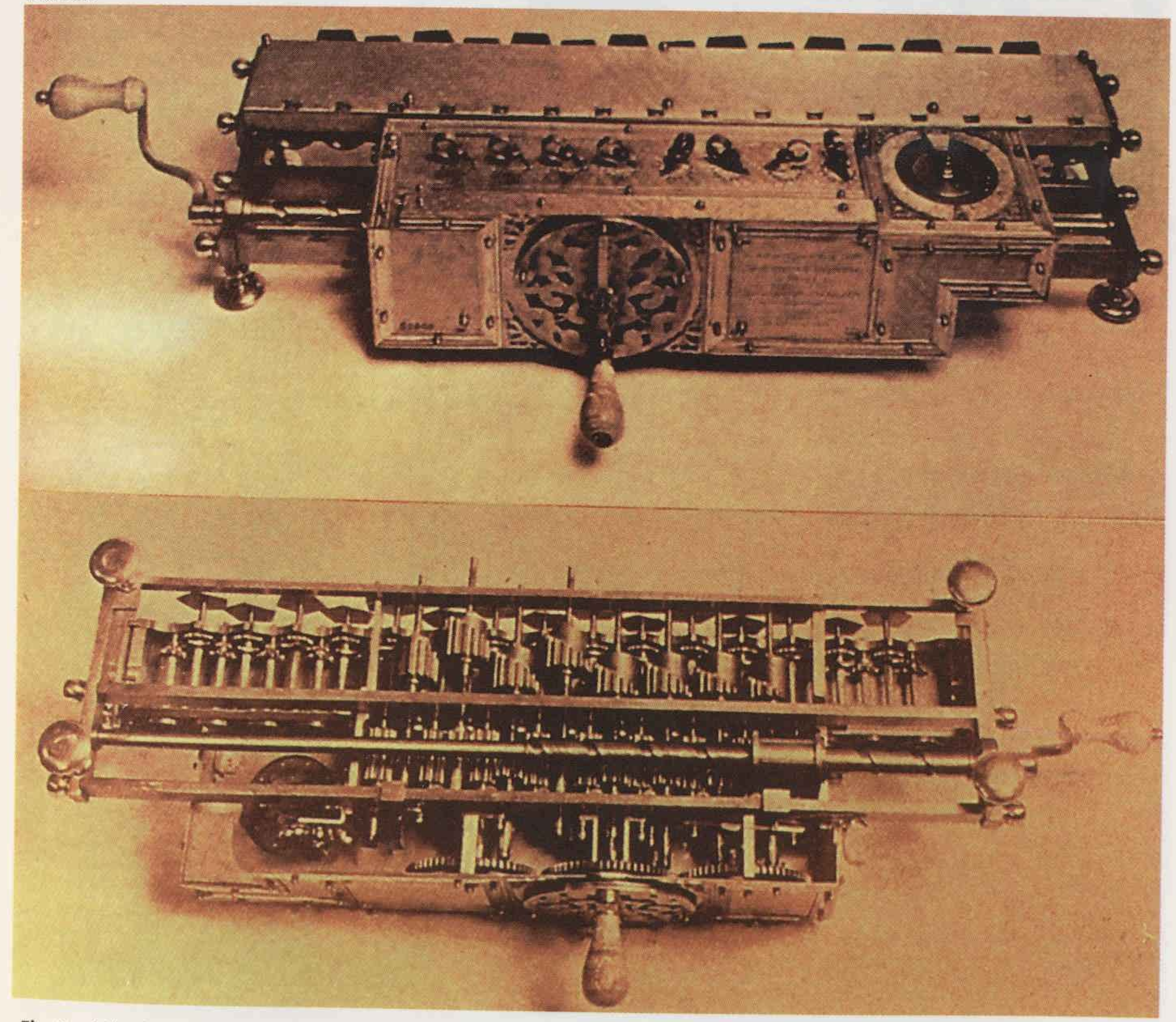


Fig. 3 – Máquina calculadora de Leibniz.

INTEGRALES HIPERBÓLICAS E INTEGRALES IRRACIONALES

Integrales hiperbólicas

Puesto que sh $x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, ch $x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

el cambio $y = e^x$ nos da

$$\text{sh } x = \frac{y^2 - 1}{2}, \ \text{ch } x = \frac{y^2 + 1}{2}, \ dx = \frac{dy}{y}$$

por lo que cualquier integral de la forma

$$\int R(\text{sh}x, \text{ch}x)\, dx$$

será racional en y, con el cambio mencionado. Por otra parte, el comportamiento de estas funciones es análogo al de las trigonométricas, por lo que pueden usarse métodos paralelos a los descritos para aquéllas, utilizando

$$\text{sh}^2 x - \text{ch}^2 x = 1, \ \text{sh}x \cdot \text{ch}x = \frac{\text{sh}2x}{2},$$

$$\text{sh}^2 x = \frac{\text{ch}2x - 1}{2}, \ \text{ch}^2 x = \frac{\text{ch}2x + 1}{2},$$

• **Ejemplo**. $\int \text{sh}^2 x \cdot \text{ch}^2 x\, dx = \int \dfrac{\text{ch}^2 2x - 1}{4}\, dx =$

$$= \frac{1}{4} \int \text{ch}^2 2x \cdot dx - \frac{x}{4} = \frac{1}{4} \int \frac{\text{ch}4x + 1}{2}\, dx - \frac{x}{4} =$$

$$= \frac{1}{32} \text{sh}4x + \frac{x}{8} - \frac{x}{4} + C$$

donde el método usado es el de F/8-**IV b.**

Integrales irracionales

I. Las integrales de la forma

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$$

donde $m_1/n_1, \ldots, m_k/n_k$ son fracciones irreducibles se hacen racionales con el cambio

$$y = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}},$$

donde n es el mínimo común múltiplo de $n_1, \ldots, n_k$. Si $n = n_i \cdot \alpha_i$, será

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_i}{n_1}} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_i \alpha_i}{n_i \alpha_i}} = y^{n_i \alpha_i}, \ x = \frac{b - dy^n}{cy^n - a}.$$

Un caso particular lo contituyen

$$\int R\left(x, \frac{m_i}{xn_i}, \ldots, \frac{m_i}{xn_k}\right) dx.$$

• **Ejemplo**. En $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}\, dx$ hacemos $x + 1 = y^6$, con lo que $x = y^6 - 1$, $dx = 6y^5\, dy$.

$$I = \int \frac{y^6 - 1}{y^2 - y^3}\, 6y^5\, dy = -6 \int \frac{y^9 - y^3}{y - 1}\, dy =$$

$$= -6\left(\frac{y^9}{9} + \frac{y^8}{8} + \frac{y^7}{6} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^4}{4}\right) + C =$$

$$= -6\left[\frac{(x+1)^{\frac{9}{6}}}{9} + \frac{(x+1)^{\frac{8}{6}}}{8} + \ldots + \frac{(x+1)^{\frac{4}{6}}}{4}\right] + C,$$

II. Integrales $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$.

II a. Si $a > 0$ el cambio

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\, x + t$$

conduce, tras elevar al cuadrado, simplificar y despejar x, a un racional en t.

II b. Si $c > 0$ el cambio

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}$$

proporciona una racional en t, tras elevar al cuadrado, simplificar y despejar.

II c. Cuando $a < 0$, $c < 0$, si es

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

el cambio siguiente da una racional en t

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)\, t$$

• **Ejemplo**. Para hallar $k = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x - 4}}\, dx$

haremos $\sqrt{x^2 + 4x - 4} = x + t$, con lo que

$$x = \frac{t^2 + 4}{4 - 2t}, \ dx = \frac{8t - 2t^2 + 8}{(4 - 2t)^2}\, dt$$

$$\sqrt{x^2 + 4x - 4} = x + t = \frac{t^2 + 4}{4 - 2t} + t = \frac{4t - t^2 + 4}{4 - 2t};$$

$$k = \int \frac{\dfrac{t^2 + 4}{4 - 2t}}{\dfrac{4t - t^2 + 4}{4 - 2t}} \cdot \frac{8t - 2t^2 + 8}{(4 - 2t)^2}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^2 + 4}{(t - 2)^2}\, dt =$$

$$= \frac{t}{2} + 2 \ln|t - 2| - \frac{4}{t - 2} + C$$

donde haremos $t = \sqrt{x^2 + 4x - 4} - x$.

Fig. 1 – Carl Friedrich Gauss (1777-1855), llamado Príncipe de los Matemáticos, es considerado como uno de los mayores genios de la humanidad junto con Arquímedes y Newton. Estudió las formas cuadráticas, la constructibilidad de polígonos regulares, la capilaridad, el magnetismo, la telegrafía, los mínimos cuadrados, la teoría de los errores... y en general tuvo influencia en todos los campos de la astronomía, la matemática y la física.

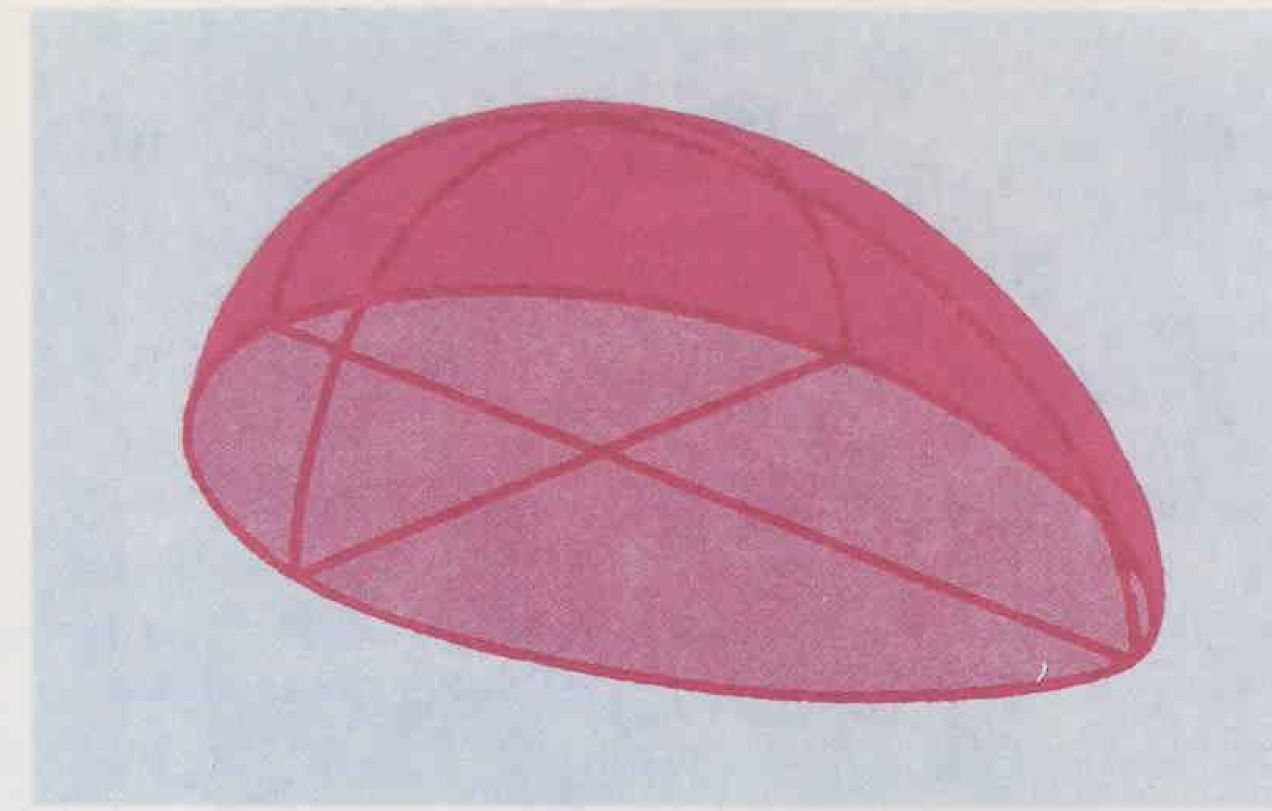


Fig. 2 – Curvatura de las superficies.

Fig. 3 – Telégrafo Morse, al cual se llegó gracias a estudios hechos por Gauss, entre otros.

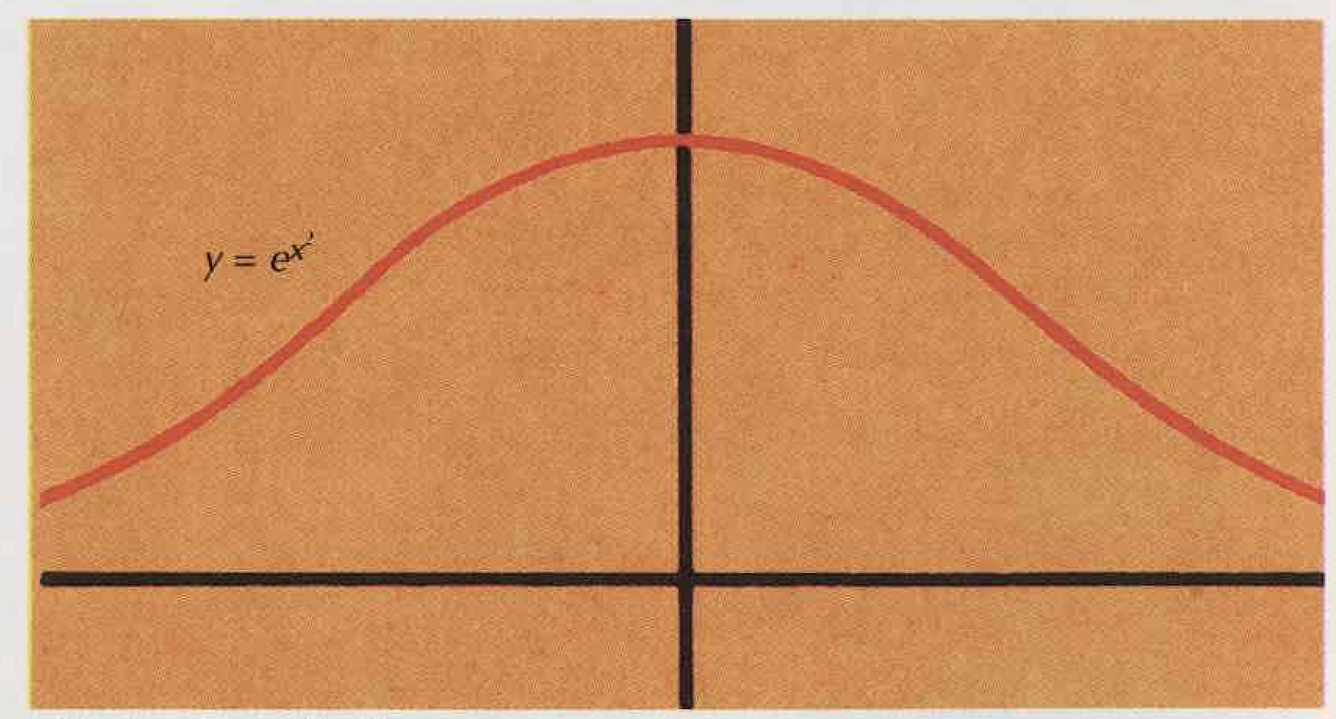


Fig. 4 – Curva de Gauss.

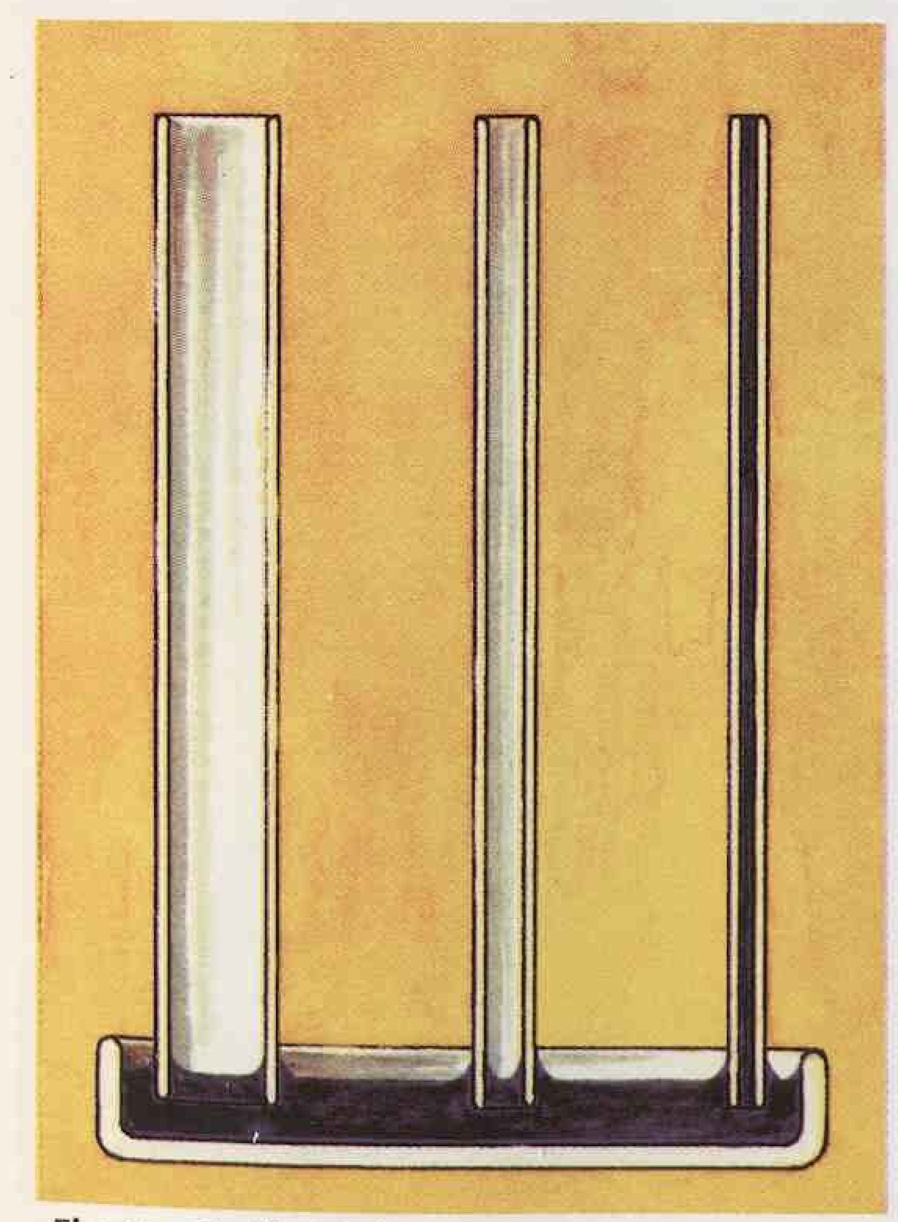


Fig. 5 – Capilaridad.

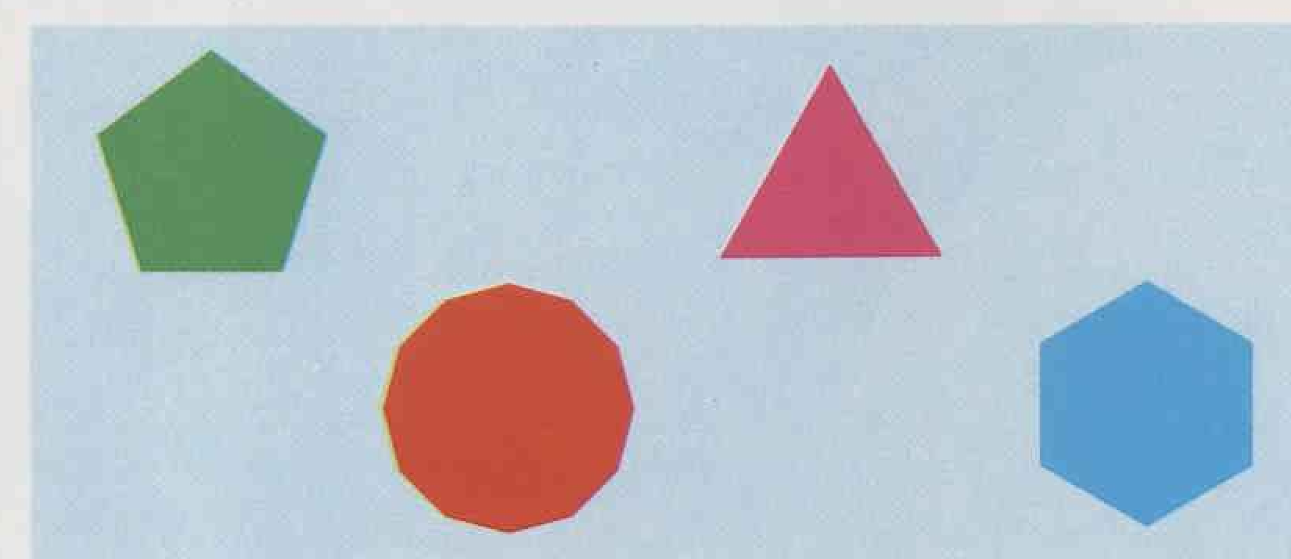


Fig. 6 – El polígono de diecisiete lados también es construible.

III. Las integrales $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, son subcaso de **II**; también puede ponerse

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = P_{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$+\,\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde P_{n-1} es un polinomio indetermnado de grado $n-1$, cuyos coeficientes se hallan derivando (α también).

• **Ejemplo**. Para hallar $K = \int \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ hacemos

$$\int \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+1} + \alpha\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

que al derivar nos da

$$\frac{x^3+1}{\sqrt{x^2+1}} = (2ax+b)\sqrt{x^2+1} +$$

$$+\,(ax^2+bx+c)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+1}}$$

con lo que, multiplicándolo todo por $\sqrt{x^2+1}$,

se obtiene $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = \frac{2}{3}$, $\alpha = 1$

Por lo tanto,

$$K = \frac{x^2-2}{3}\sqrt{x^2+1} + \int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x^2-2}{3}\sqrt{x_2+1} + \operatorname{arg\,sh}x + C.$$

III'. Las integrales $\int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ se transforman en las **III** con el cambio previo $(\alpha x+\beta) = t^{-1}$.

IV. Las integrales llamadas binomias

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

donde m, n y p son fracciones irreducibles, se integran elementalmente en los casos siguientes:

IV 1. Cuando $p \in \mathbf{Z}$, pues haciendo $x^n = t$ se pasa al tipo irracional **I**.

IV 2. Cuando $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$, haciéndose entonces $a + bx^n = t^q$, siendo q el denominador de p.

IV 3. Cuando $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$, haciéndose $ax^{-n} + b = t^q$, siendo q el denominador de p.

• **Ejemplo.** La integral $\int \frac{x^2\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{\sqrt{x^3}}\,dx$ puede escribirse de la forma

$$S = \int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx,$$

tratándose de una binomia con

$$m = \frac{1}{2},\ n = \frac{3}{4},\ p = \frac{1}{3};\ \frac{m+1}{n} = 2,$$

por lo que se trata de **IV 2.** Haciendo $t^3 = \left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)$ tendremos

$$\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}dx = 3t^2\,dt,\quad x^{-\frac{1}{4}}dx = 4t^2\,dt,$$

$$x^{-\frac{1}{2}}dx = x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}dx = (t^3-1)\cdot 4t^2\,dt,$$

por lo que

$$S = \int (t^3-1)\cdot 4t^2\cdot dt = \frac{4t^7}{7} - t^4 + C,$$

donde sólo resta sustituir $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}$.

V. Las integrales $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, si se escribe el radicando como suma o resta de cuadrados, se transforman en

V 1. $\int R\left(y, \sqrt{m^2-y^2}\right)dy$

V 2. $\int R\left(y, \sqrt{m^2+y^2}\right)dy$

V 3. $\int R\left(y, \sqrt{y^2-m^2}\right)dy$

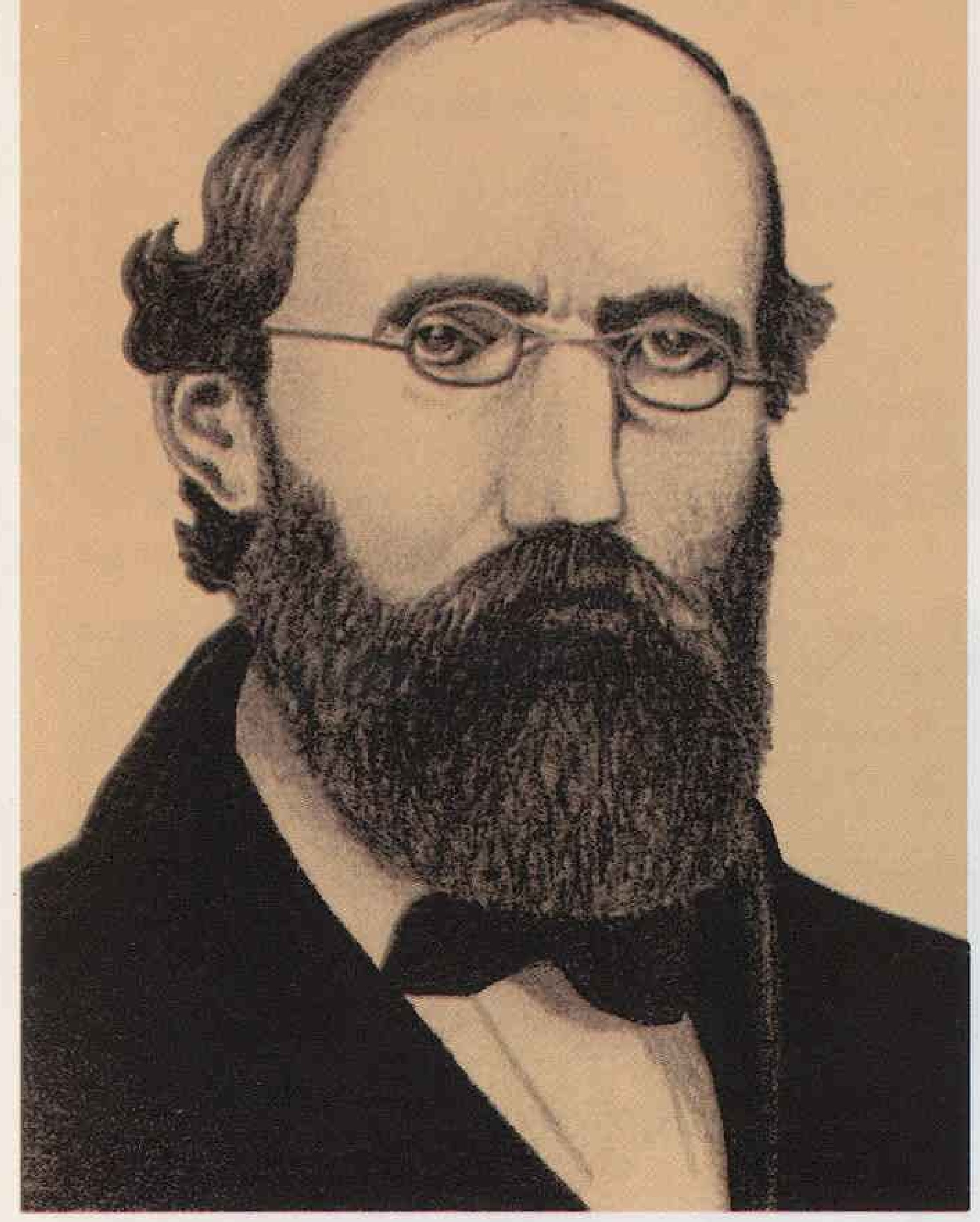
que se pueden resolver, respectivamente, mediante

V 1. $y = m$ sen$z$ o $y = m$ th$z$,

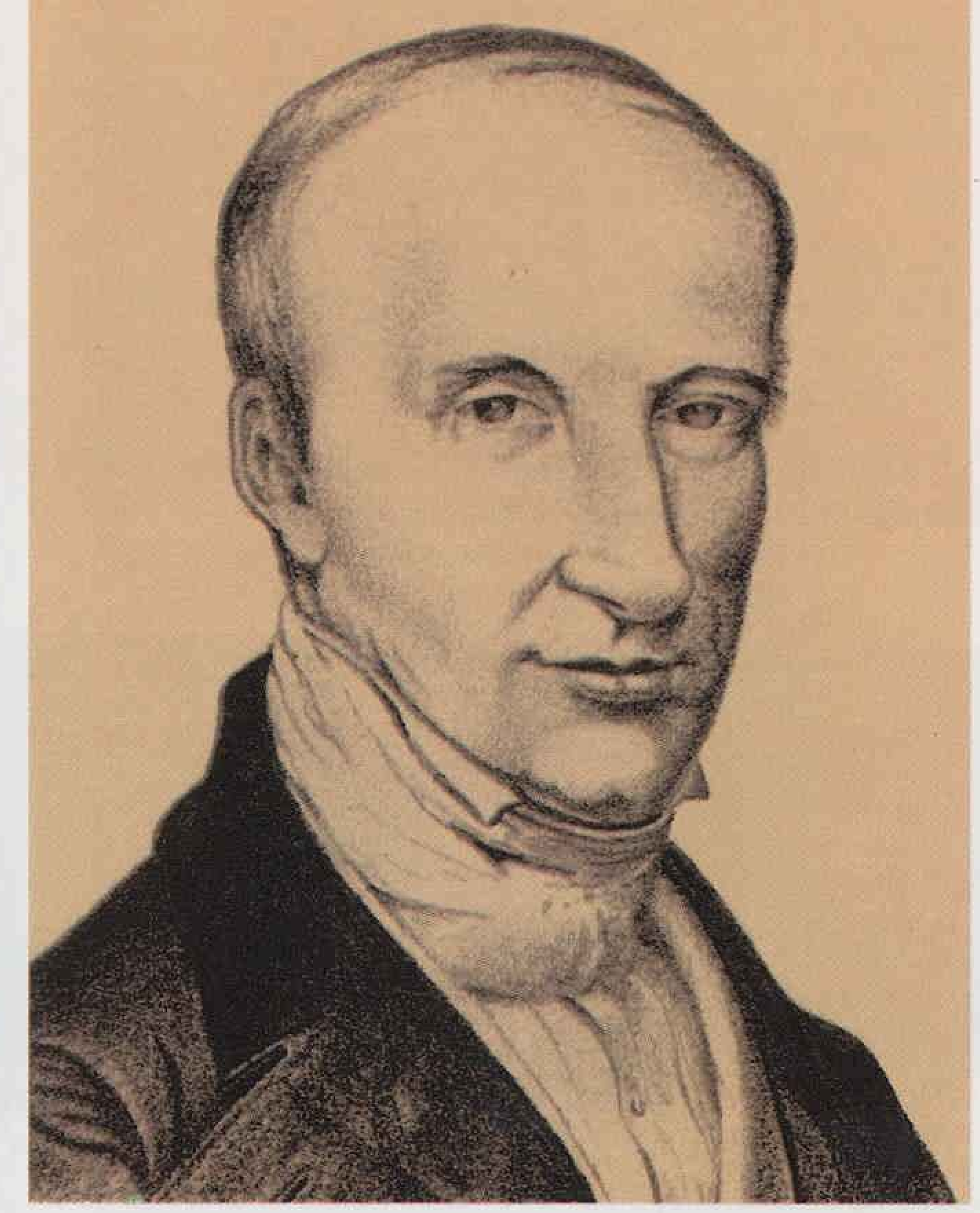
V 2. $y = m$ tg$z$ o $y = m$ sh$z$,

V 3. $y = m$ sec$z$ o $y = m$ ch$z$.

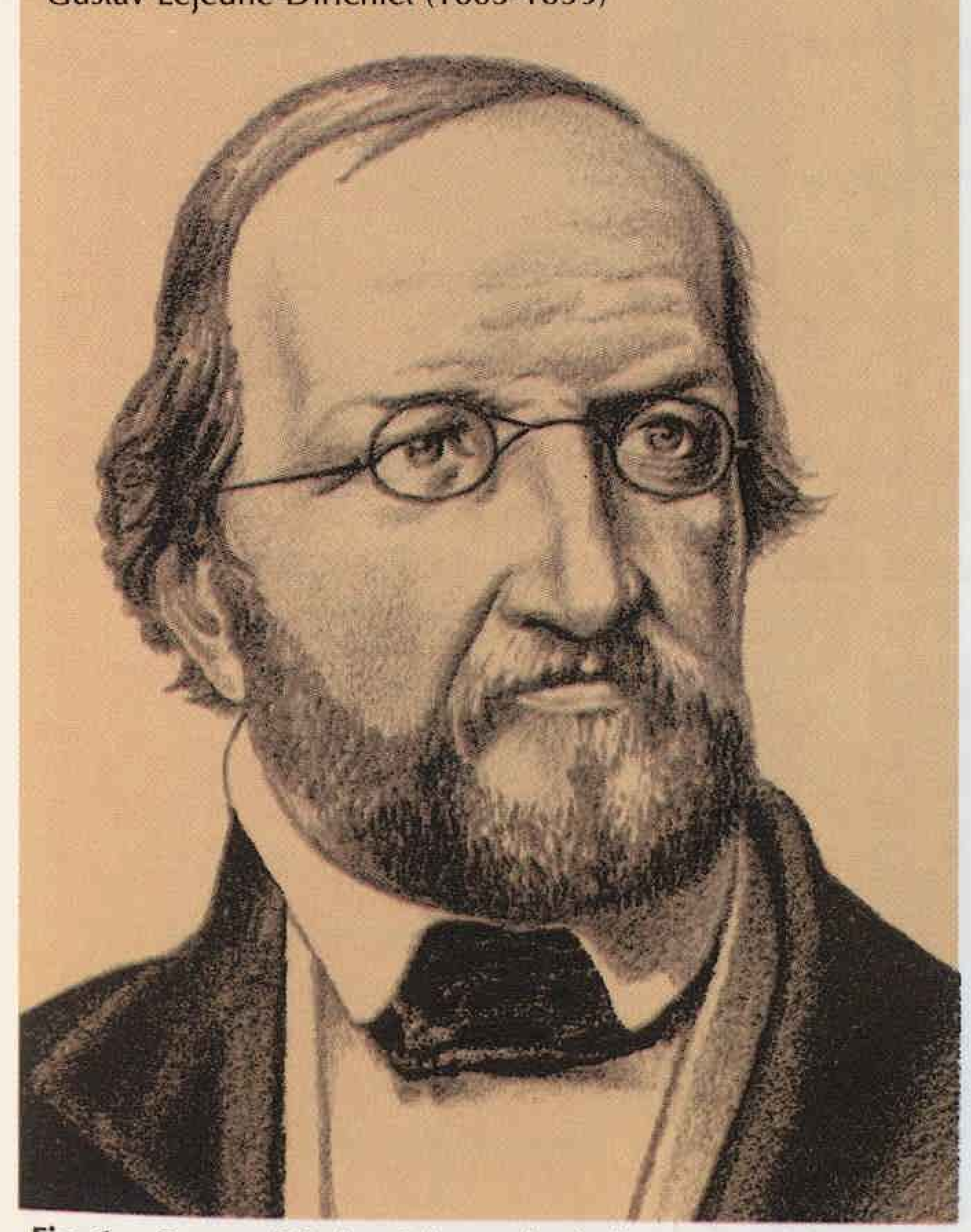
Bernhard Riemann (1826-1866)



Augustin Cauchy (1789-1857)



Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859)



Henry Lebesgue (1875-1941)

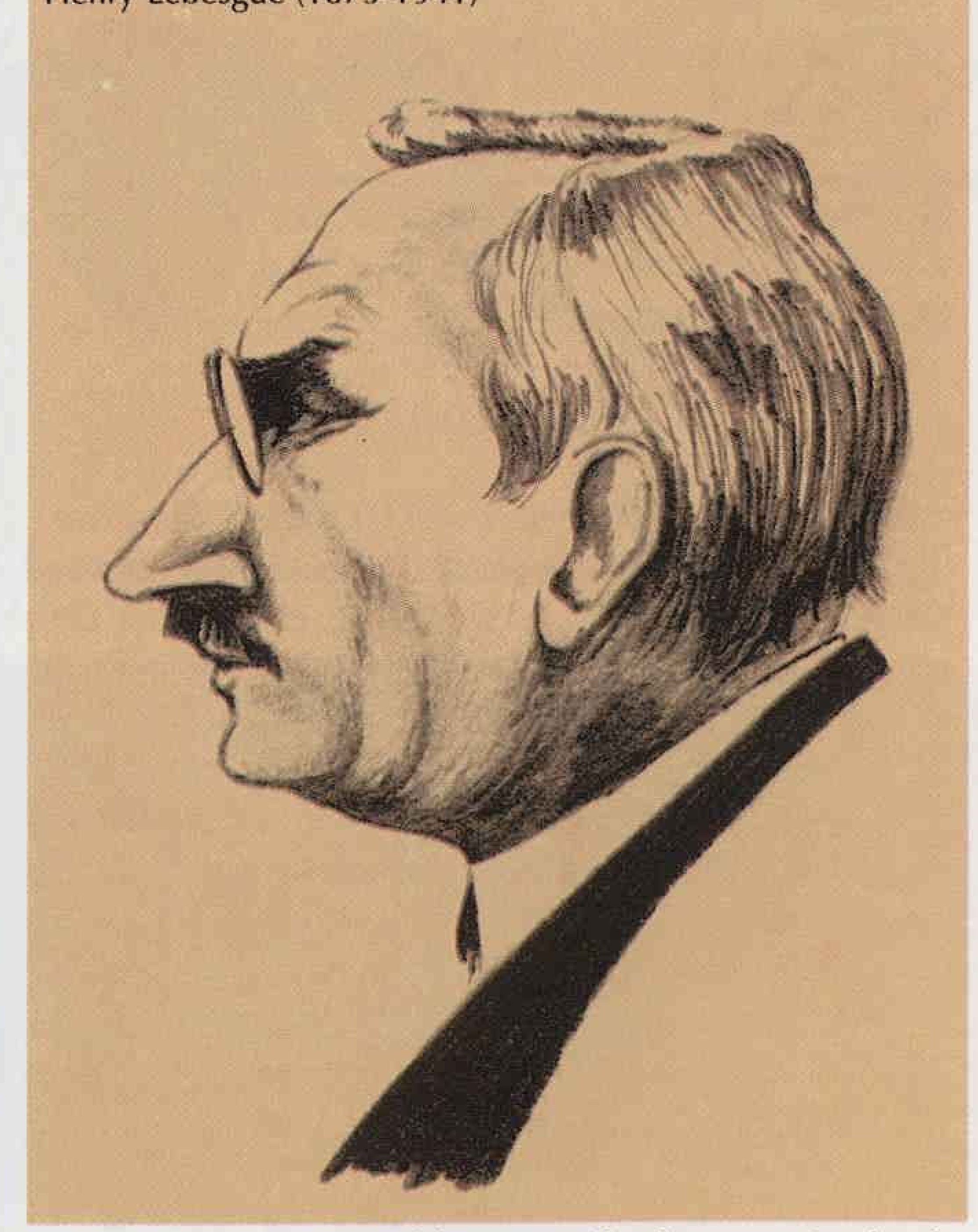


Fig. 1 – Personalidades del mundo de las Matemáticas, que, aparte de sus otras importantísimas contribuciones a esta ciencia, tuvieron especial papel en el desarrollo del cálculo integral.

APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

Áreas planas

Según vimos, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nos da la suma algebraica de las áreas de las regiones limitadas por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las verticales $x = a$ y $x = b$, computándose como negativas las de las zonas bajo el eje, por lo que habrá de integrarse en cada intervalo en que f no se anule y tomar el valor absoluto del resultado.

• **Ejemplos.** El área que encierran el eje y una semionda de $y = \operatorname{sen} x$ es (fig. 1)

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

....

Hallemos el área entre $x = 0{,}5$ y $x = 6$ limitada por el eje de abscisas y la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}{x^3}.$$

Como en $[0{,}5,\ 6]$ la función corta al eje en los puntos de abscisa 1, 2 y 5 (fig. 3), hallaremos el área en cada segmento. Al ser primitiva de $f(x)$ $F(x) = x - 8\ln x - (17/x) + (5/x^2)$ se tiene $F(1) - F(0{,}5) \simeq -3{,}0451774$, $F(2) - F(1) \simeq 0{,}204823$, $F(5) - F(2) \simeq -0{,}280326$, $F(6) - F(5) \simeq 0{,}046982$, cuyos valores absolutos sumamos para obtener el área 3,5773084. En cambio

$$\int_{0{,}5}^{6} f(x)\,dx = F(6) - F(0{,}5) \simeq -3{,}0736984.$$

El área de una figura limitada por $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y dos verticales $x = a$, $x = b$, será el valor absoluto de

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

calculada como diferencia de las áreas bajo ellas (fig. 2); del mismo modo se halla el área encerrada por las curvas si se cortan en puntos de abscisa a y b, teniendo en cuenta que si se cortan en puntos intermedios habrá que calcular varias integrales y sumar sus valores absolutos.

Si la curva $y = f(x)$ viene descrita paramétricamente por las ecuaciones $x = \sigma(t)$, $y = \rho(t)$, la integral que nos da el área sería

$$\int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)\cdot\sigma'(t)\cdot dt$$

donde t_1 y t_2 son tales que $\sigma(t_1) = a$, $\sigma(t_2) = b$.

En coordenadas polares, el área limitada por la curva $r = f(\varphi)$ y los radios de argumento φ_1 y φ_2 es

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\cdot d\varphi,$$

debiendo restarse varias de estas expresiones si es necesario, por ejemplo, si los radios cortan en más de un punto.

• **Ejemplos.** El área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es, usando la simetría (fig. 6),

$$S = 4\int_0^a \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}\,dx = \pi ab$$

tras hacer $x = a\cdot\cos t$ y usar F/8-IV b. Obsérvese que para $a = b = r$ tenemos una circunferencia.

....

El área de la luneta limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = x^3$ entre los puntos de abscisa 0 y 1 (fig. 4), es

$$\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

....

El área A limitada (fig. 5) por las curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos 2x$ entre $\pi/6$ y $3\pi/2$, al haber un punto de corte intermedio en $x = 5\pi/6$ la hallaremos mediante

$$\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (\operatorname{sen} x - \cos 2x)\,dx =$$

$$= \left[-\cos x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = 3\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

y como $\left[-\cos x - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_{5\pi/6}^{3\pi/2} = 1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{4} < 0,$

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{9\sqrt{3} - 4}{4} \simeq 2{,}897.$$

....

Si una circunferencia de radio r rueda sin deslizar sobre una recta, su punto de contacto inicial describe, hasta volver al eje, una *cicloide* (fig. 7), cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = r(t - \operatorname{sen} t),\quad y = r(1 - \cos t),$$

con lo que el área encerrada es

$$T = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t)\cdot r(1 - \cos t)\,dt = 3\pi r^2$$

(tras usar F/8-IV b)

....

El área encerrada por la *cardioide* $r = a(1 + \cos\varphi)$ (fig. 1 de F/12)

$$\text{es } 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2\,(1 + \cos\varphi)^2\,d\varphi\right] = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

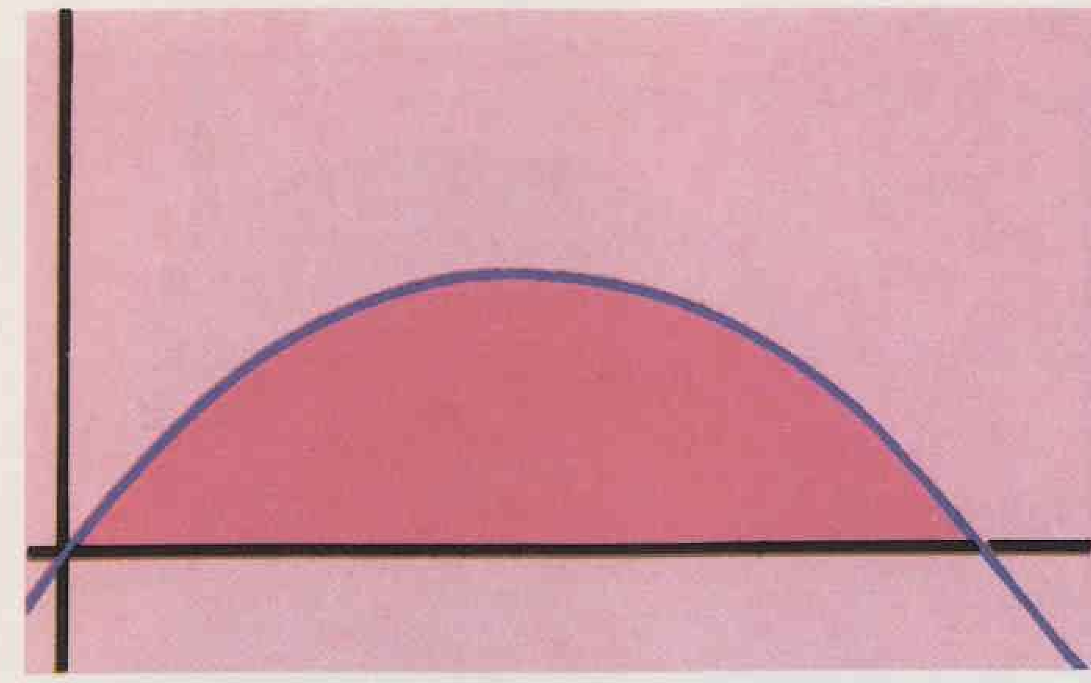


Fig. 1 – Área bajo una semionda de $y = \operatorname{sen} x$.

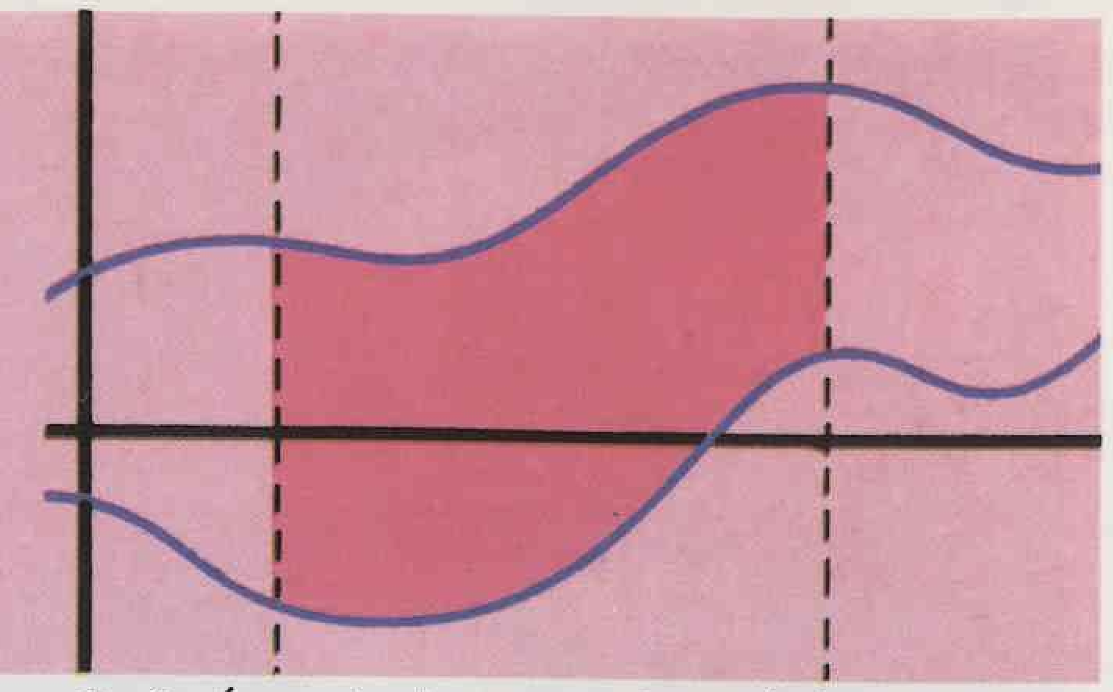


Fig. 2 – Área entre dos curvas y dos verticales.

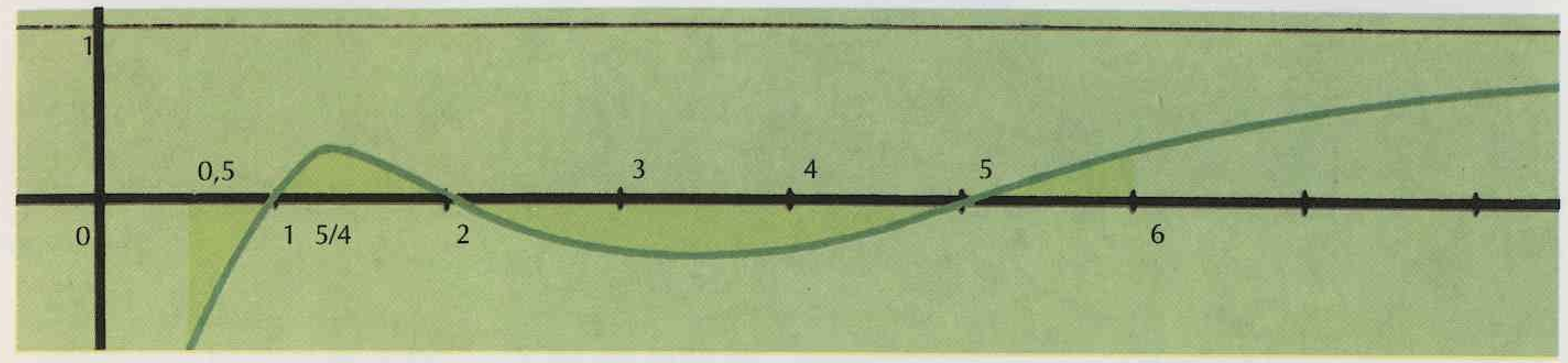


Fig. 3 – Hay que tener en cuenta el signo de la función al calcular el área de la integral definida.

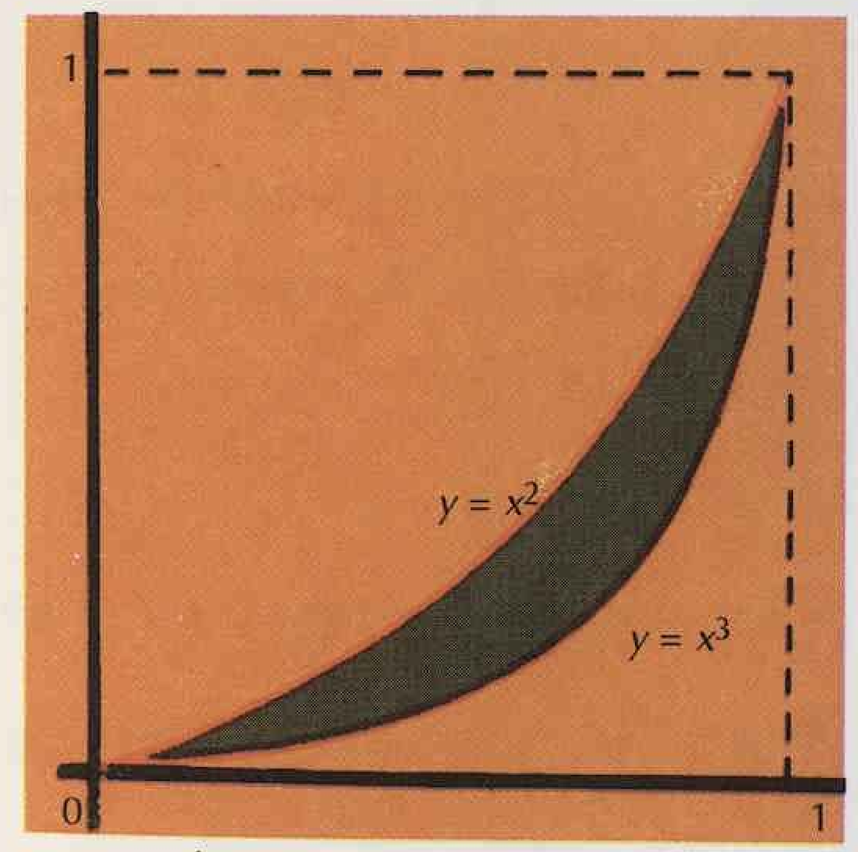


Fig. 4 – Área de una luneta.

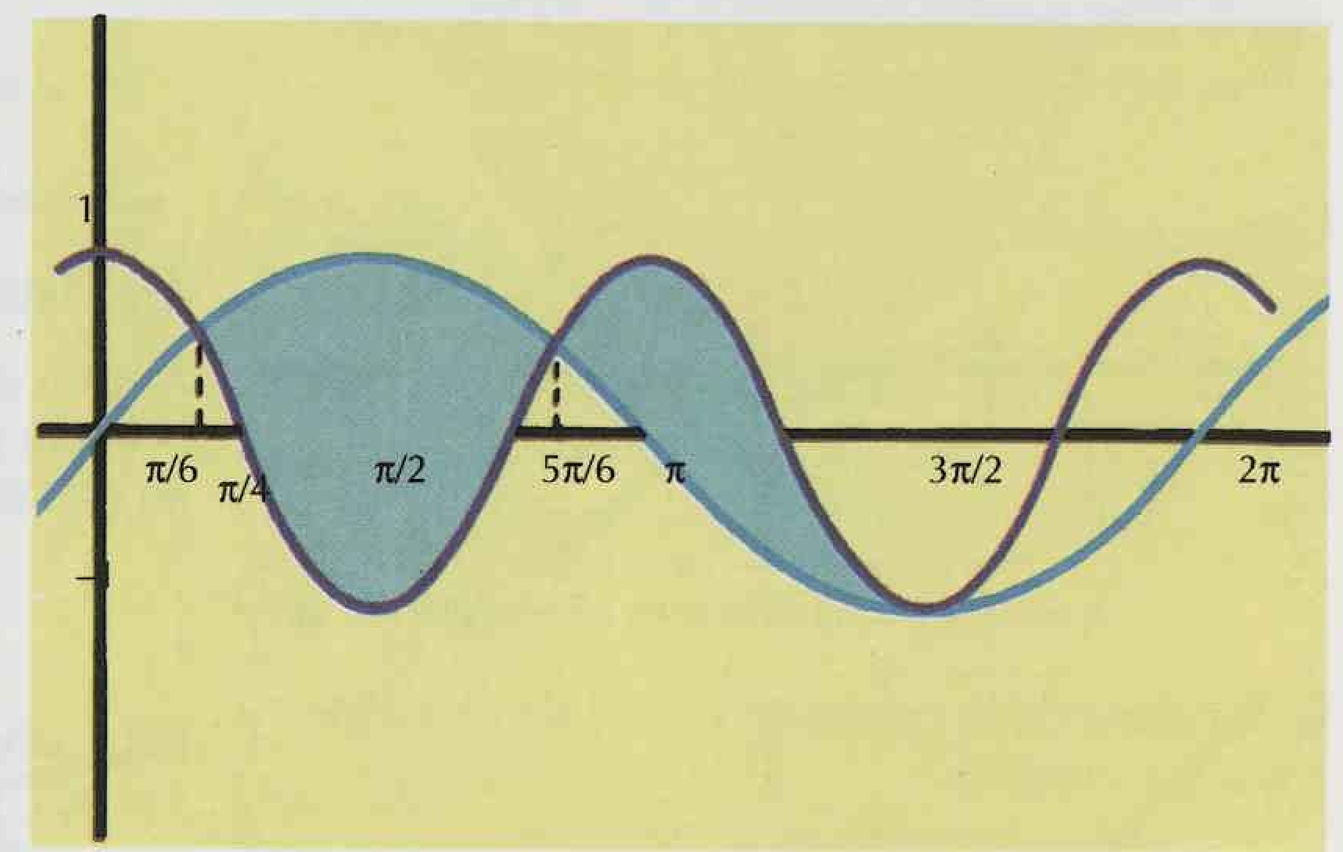


Fig. 5 – Área entre dos curvas con cambio de signo.

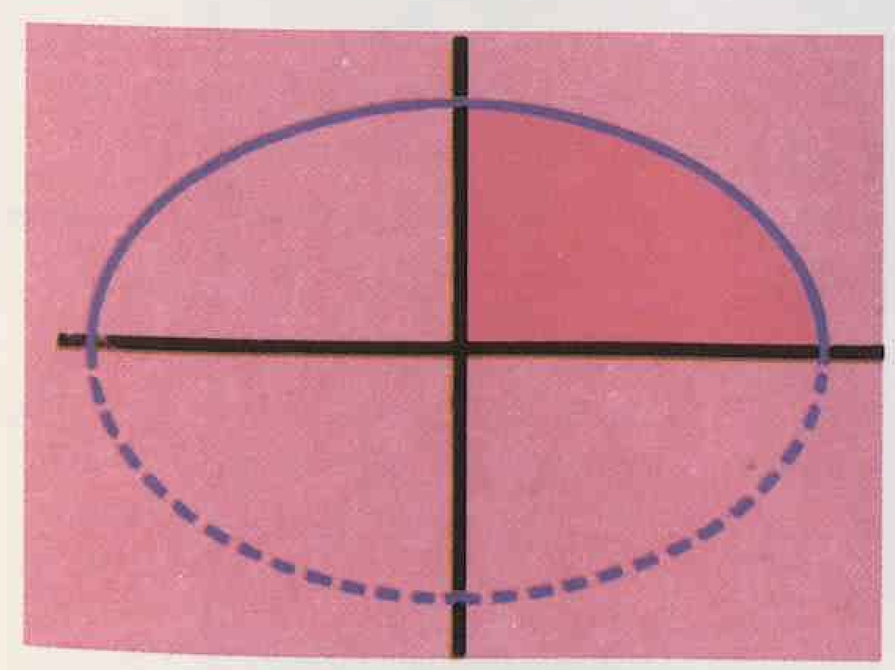


Fig. 6 – Área encerrada por la elipse.

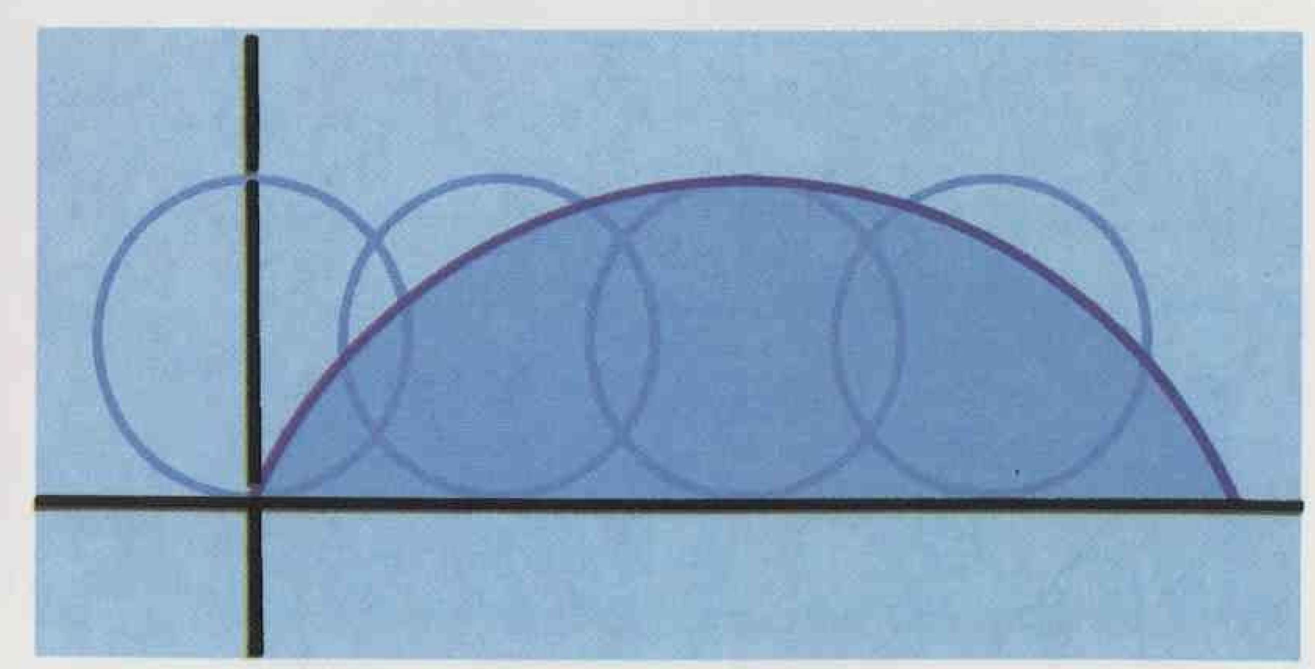


Fig. 7 – Área encerrada por la cicloide y el eje.

Longitud del arco de curva

La longitud del arco de $y = f(x)$ comprendido entre los puntos $(a, f(a))$ y es $(b, f(b))$ es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Si la curva venía descrita por $x = \sigma(t)$, $y = \rho(t)$ basta sustituir para hallar

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\sigma'(t))^2 + (\rho'(t))^2}\, dt$$

donde $\sigma(t_1) = a$, $\sigma(t_2) = b$.
En coordenadas polares, la longitud de $r = f(\varphi)$ entre los radios de argumento φ_1 y φ_2 es

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi$$

• **Ejemplos.**
La longitud del arco de la parábola $y = x^2$ entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$ es

$$p = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx.$$

con lo que, haciendo $\sqrt{1 + 4x^2} = 2x + t$, como se vio en F/9-II a., se tiene $p \simeq 1{,}478929$.

....

La longitud de la cicloide (F/11) es

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\,(1 - \cos t)^3 + r^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt =$$

$$= 2\, r \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt = 8r.$$

....

La longitud de la cardioide (fig. 1) de ecuación $r = a(1 + \cos\varphi)$ es

$$L = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\varphi + a^2\,(1 + \cos\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= 2\, a \int_0^{\pi} 2 \cos \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a.$$

Volúmenes por secciones

Si de cada sección de un sólido, paralela a uno de los planos de coordenadas, por ejemplo, el xy, se conoce el área $f(z)$, el volumen entre $z = a$ y $z = b$ es $\int_a^b f(z)\, dz$, resultado claramente relacionado con el Principio de Cavalieri (F/5).

• **Ejemplo.** Hallar el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La sección a altura z (fig. 6) tiene área $\pi ab\,(c^2 - z^2)/c^2$
por lo que el volumen es

$$\int_{-c}^{c} \frac{\pi ab\,(c^2 - z^2)}{c^2}\, dz = \frac{4}{3}\, \pi abc$$

(Si $a = b = c = r$ sería una esfera.)

Volumen de cuerpos de revolución

Al girar la figura limitada por $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ en torno al eje de abscisas o al de ordenadas, se obtienen cuerpos de volúmenes respectivos

$$V_x = \int y^2\, dx, \quad V_y = 2\pi \int_a^b xy\, dx.$$

• **Ejemplo.** Entre 0 y 1 la parábola $y = x^2$ genera al girar en torno al eje y un tronco de paraboloide de revolución (fig. 4), cuyo volumen es

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 \cdot dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Al girar en torno al eje x, se origina un cuerpo trompetiforme (fig. 3), cuyo volumen será

$$V_x = \pi \int_0^1 (x^2)\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Área lateral de una superficie de revolución

Al girar alrededor del eje de abscisas el arco de la curva $y = f(x)$ entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ se obtiene una superficie de área

$$A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Si la curva viene descrita paramétricamente por $x = \sigma(t)$, $y = \rho(t)$ con $\sigma(t_1) = a$, $\sigma(t_2) = b$, es

$$A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) \sqrt{(\sigma'(t))^2 + (\rho'(t))^2}\, dt$$

• **Ejemplos.** El área M de la cinta generada por $y = \sqrt{x}$ al girar entre 2 y 3 es (fig. 5)

$$M = 2\pi \int_2^3 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \cdot dx \simeq 10{,}405042.$$

....

Las ecuaciones paramétricas de la esfera de radio r son $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$, por lo que su área S es

$$A = 2\pi \int_0^{\pi} r \operatorname{sen} t \cdot \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2 t + r^2 \cos^2 t} \cdot dt =$$
$$= 2\pi r^2 \left[-\cos t \right]_0^{\pi} = 4\pi r^2.$$

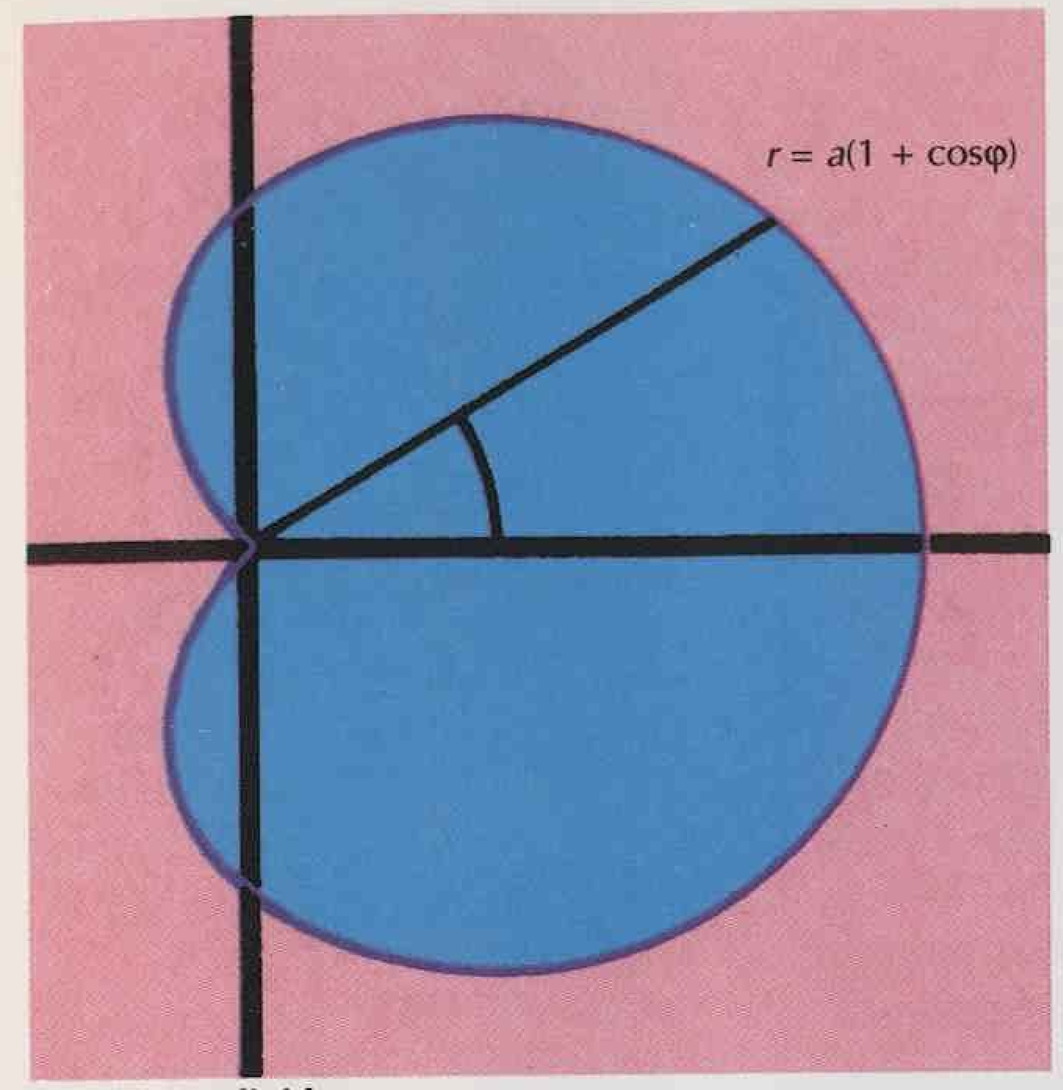


Fig. 1 – Cardioide.

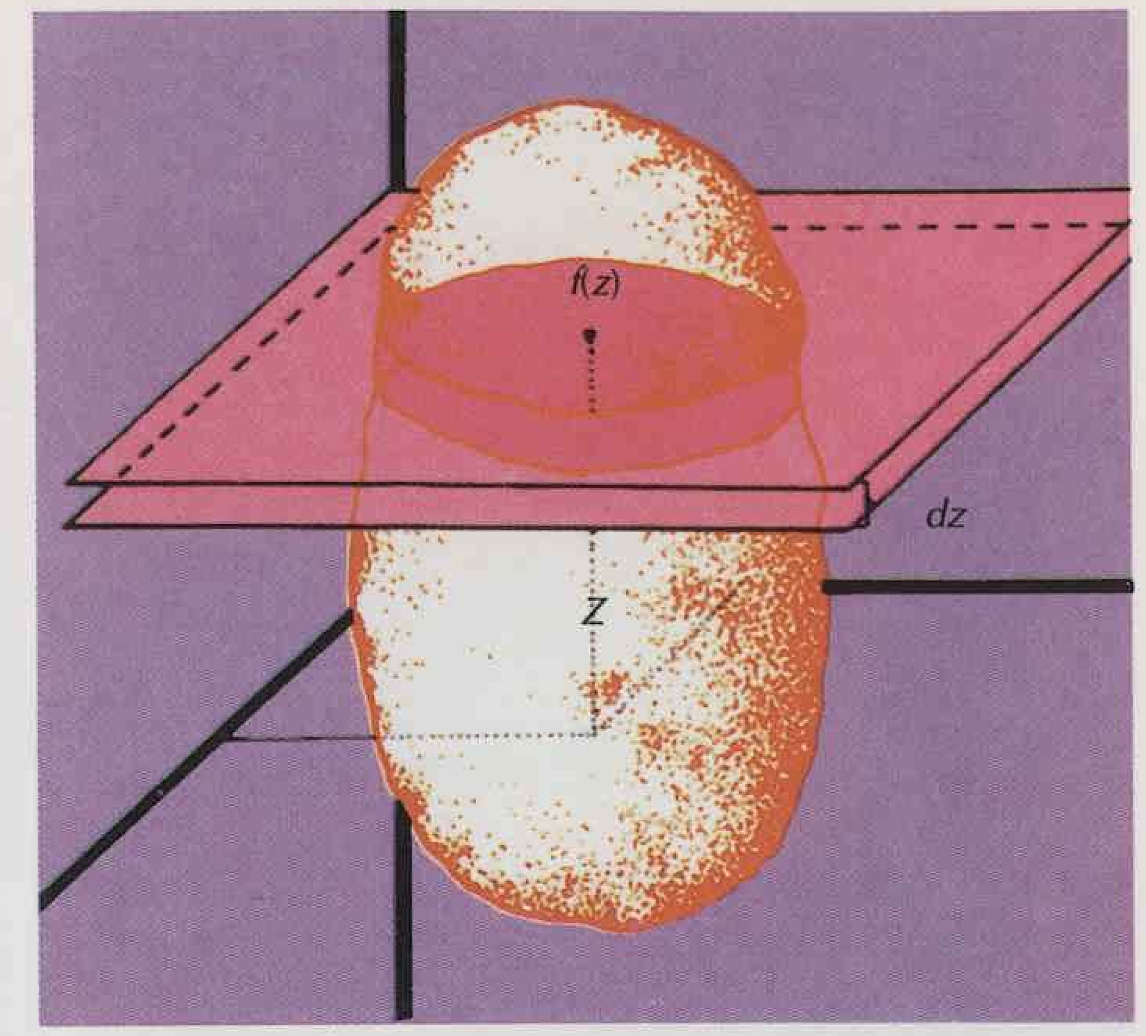


Fig. 2 – Volumen por secciones o «por rebanadas».

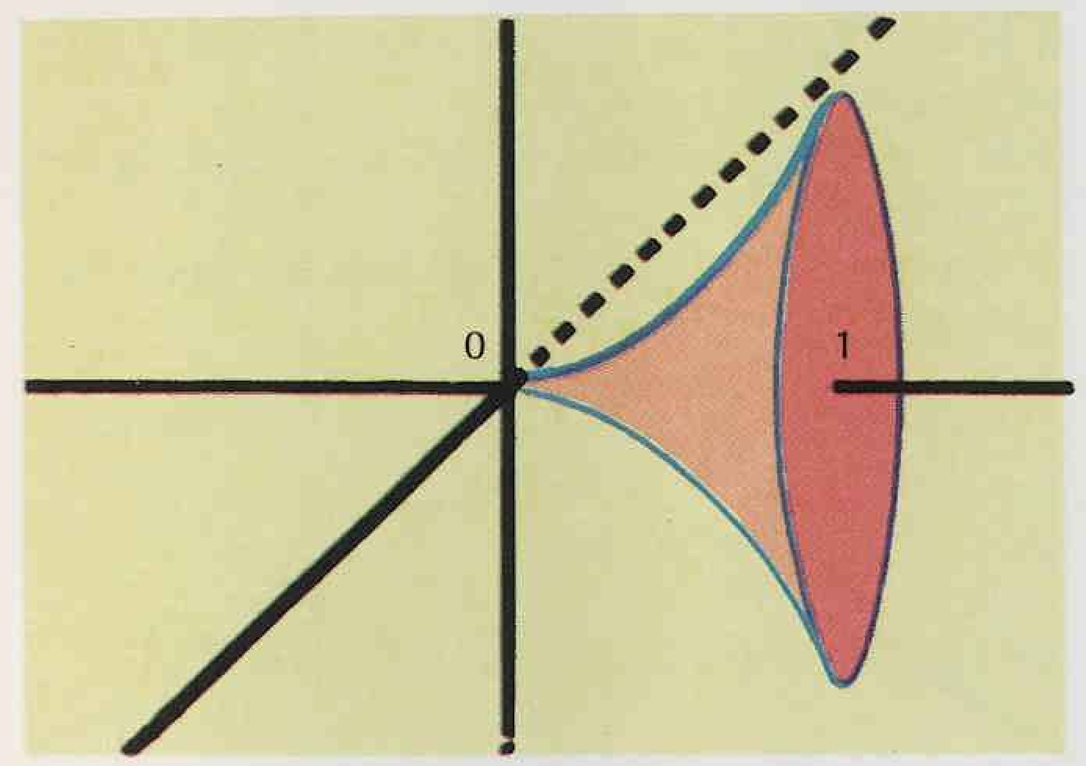


Fig. 3 – Volumen de revolución en torno al eje *x*.

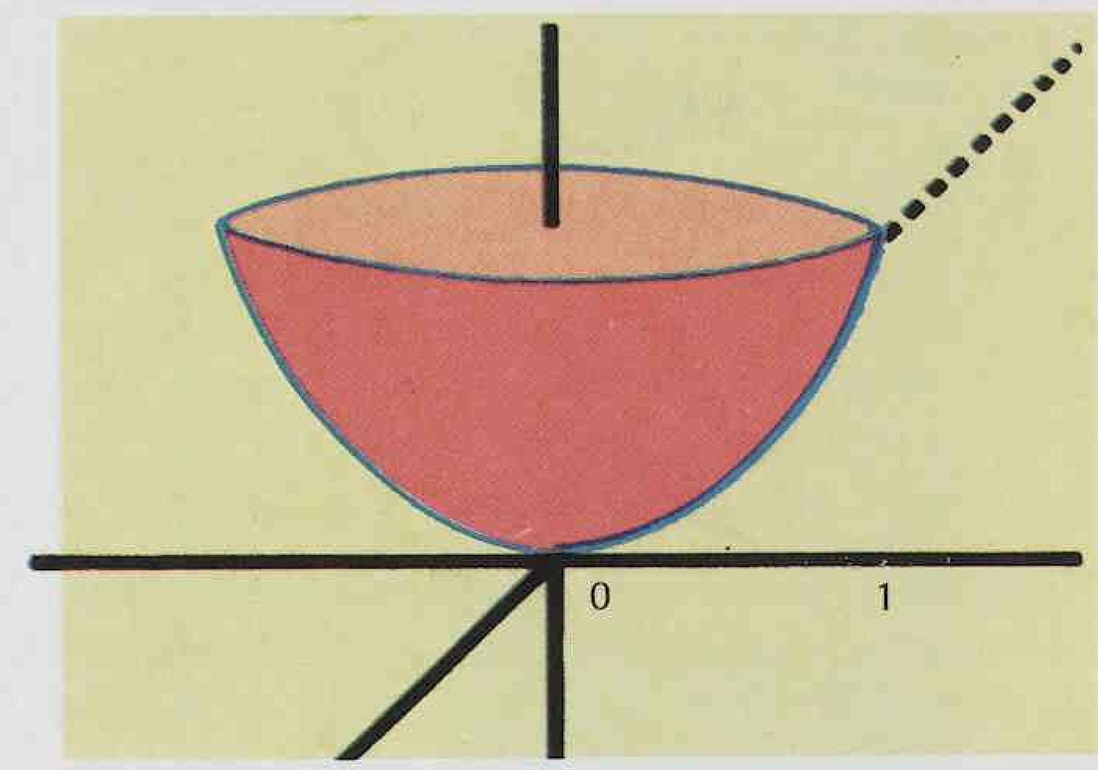


Fig. 3 – Volumen de revolución en torno al eje *y*.

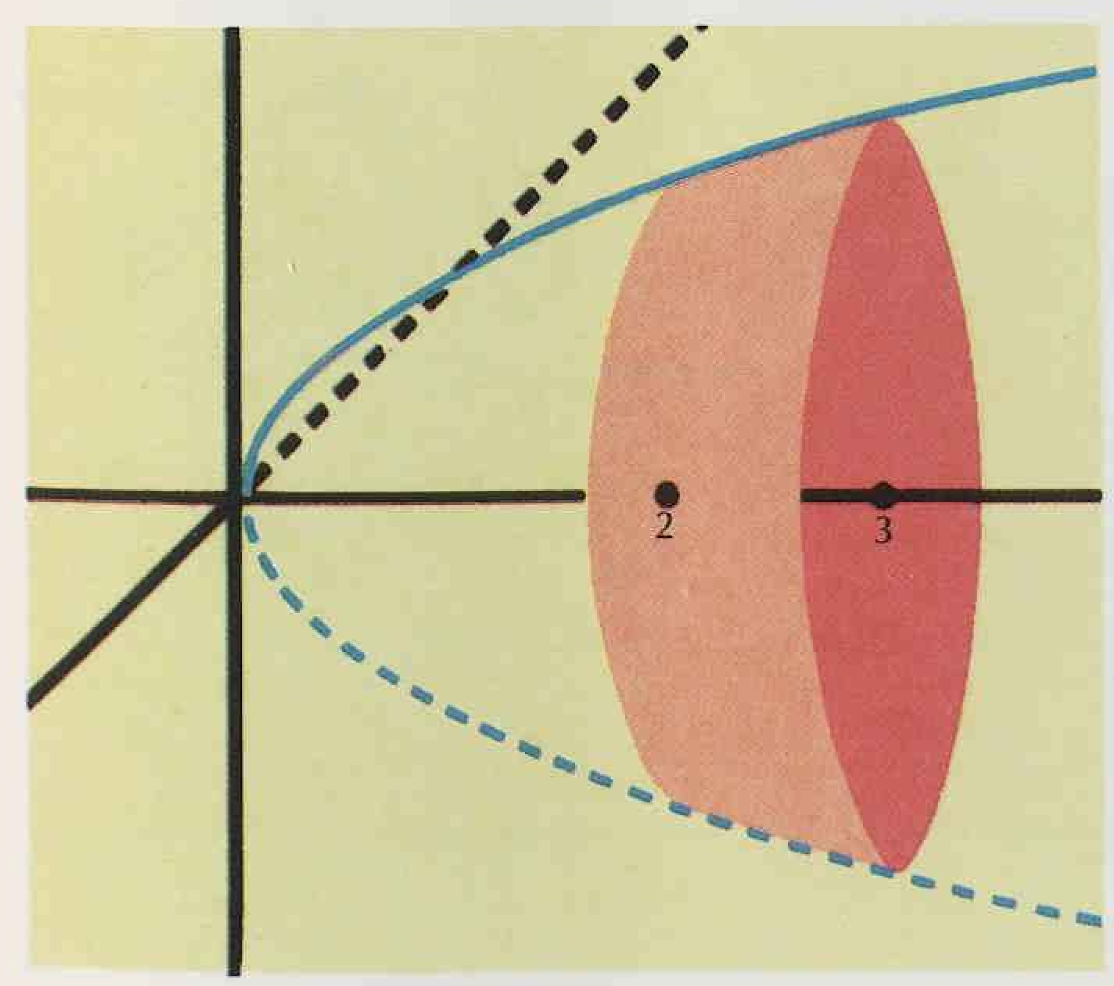


Fig. 5 – Área de una cinta.

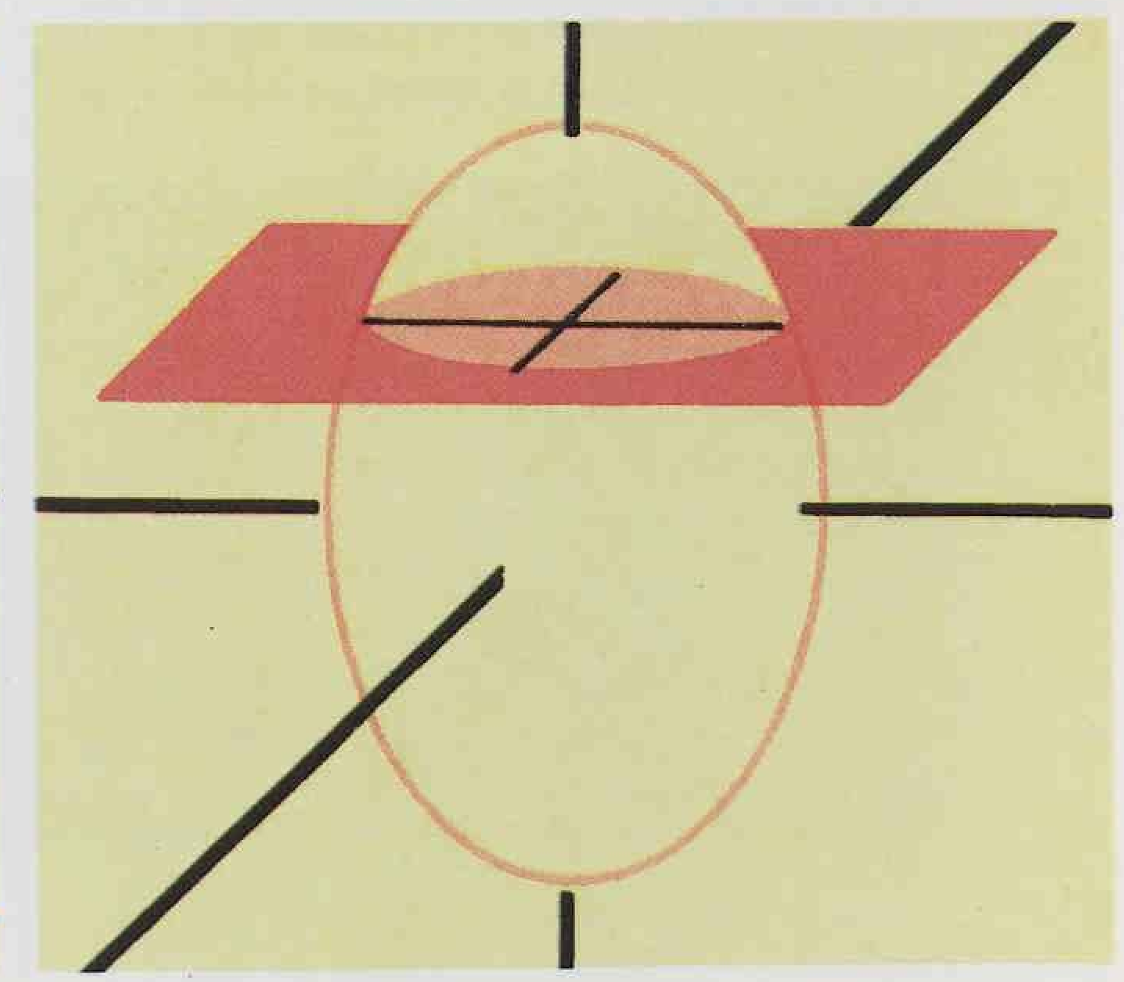


Fig. 6 – Volumen por secciones de un elipsoide.

Centro de gravedad. Teoremas de Pappus-Guldin

Las coordenadas (x_g, y_g) del centro de gravedad de un arco de curva $y = f(x)$ desde $(a, f(a))$ hasta $(b, f(b))$ son

$$x_g = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{L},\quad y_g = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{L}$$

donde L es la longitud del arco.
Las coordenadas (x_g, y_g) del centro de gravedad de la región plana de área S limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, son

$$x_g = \frac{\int_a^b xy\,dy}{S},\quad y_g = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{S}$$

Primer teorema de Guldin. El área de la superficie engendrada al girar un arco de curva plana en torno a un eje coplanario que no lo corta, es el producto de la longitud del arco por la de la circunferencia descrita por su centro de gravedad.
Segundo teorema de Guldin. El volumen engendrado por rotación de una figura en torno a un eje coplanario que no la corte, es el producto de su área por la longitud de la circunferencia descrita por su centro de gravedad.
Aunque en el caso general deberá hallarse el centro de gravedad mediante las anteriores fórmulas, a veces consideraciones sobre la simetría de la figura acortan notablemente el cálculo.

• **Ejemplo.** Una circunferencia C de radio r gira en torno a un eje que dista R de su centro $(R > r)$, engendrando un cuerpo llamado *toro* (fig. 1). Por simetría el centro de gravedad de círculo y circunferencia es el centro de C. El área lateral del toro y su volumen serán

$$A = 2\pi r\,(2\pi R) = 4\pi^2 rR,$$

$$V = \pi r^2\,(2\pi R) = 2\pi^2 r^2 R.$$

INTEGRALES IMPROPIAS

I. Si $f(x)$ es continua en $[a, +\infty]$, definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_a^r f(x)\,dx,$$

integral *impropia* denominada *convergente* si el límite existe y es finito y *divergente* en caso contrario. Análogamente se definen

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

En particular, si para $x \to \infty$, $f(x)$ es un infinitésimo de orden m, la integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si $m > 1$ y diverge si $m \le 1$.

II. Si f no está acotada en ningún entorno de $c \in [a, b]$ y es continua en $[a, c)(c, b]$, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right],$$

integral llamada *convergente* de existir y ser finito tal límite. Puede aplicarse la Regla de Barrow con cualquier primitiva de f, para $x \ne c$.
Si, para $x \to c$, $f(x)$ es un infinito de orden m, la anterior integral converge cuando $m < 1$ y diverge si $m \ge 1$.
Las integrales de I y II son llamadas, respectivamente, *impropias de primera y segunda especie*, habándose de *tercera especie* en caso de concurrir ambas situaciones. Siempre valdrán:
Criterio de comparación. Si $|f(x)| < g(x)$ y converge la integral de g, también converge la integral de f. Si $0 \le h(x) \le f(x)$ y la integral de h diverge, también la de f.
Criterio del cociente. Sea $f(x) \cdot g(x) \ge 0$ y $\lim_{x\to p} (f(x)/g(x)) = \alpha$, donde $p = c$ en el Caso II, y $p = +\infty$ en el Caso I.
a) Si $\alpha \ne 0$, $\alpha \ne \infty$, las integrales de $f(x)$ y $g(x)$ convergen o divergen ambas.
b) Si $\alpha = 0$ y la integral de $g(x)$ converge, la de $f(x)$ también.
c) Si $\alpha = \infty$ y la integral de $g(x)$ diverge, la de $f(x)$ también.

• **Ejemplos.** $\int_0^1 \ln x \cdot dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln x \cdot dx =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[x \cdot \ln x - x\right]_\varepsilon^1 = -1$$

por lo que es convergente (área en fig. 2).

....

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-1)^2} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)^2}\right] = \infty$$

es decir, diverge (fig. 3).

....

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_{-r}^r = \pi,$$

convergiendo, por tanto (fig. 5).

....

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{r\to+\infty}\left[\ln x\right]_1^r = +\infty,$$

con lo que diverge también $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ (fig. 4).

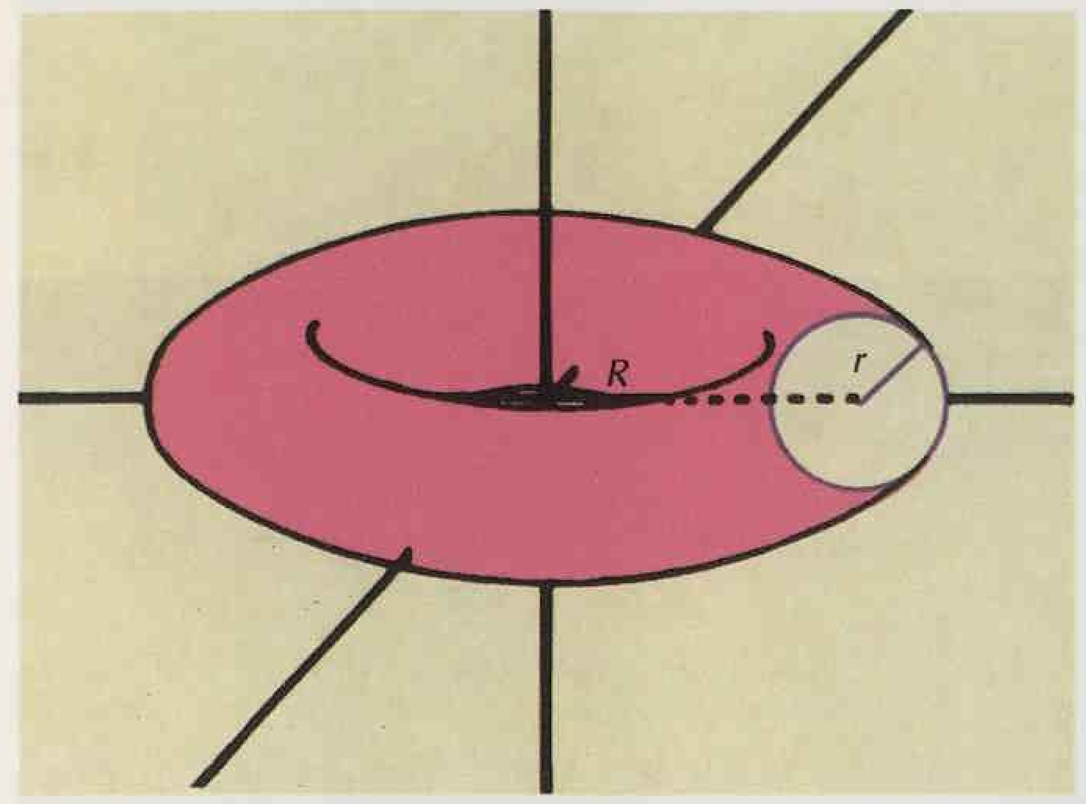


Fig. 1 – Toro.

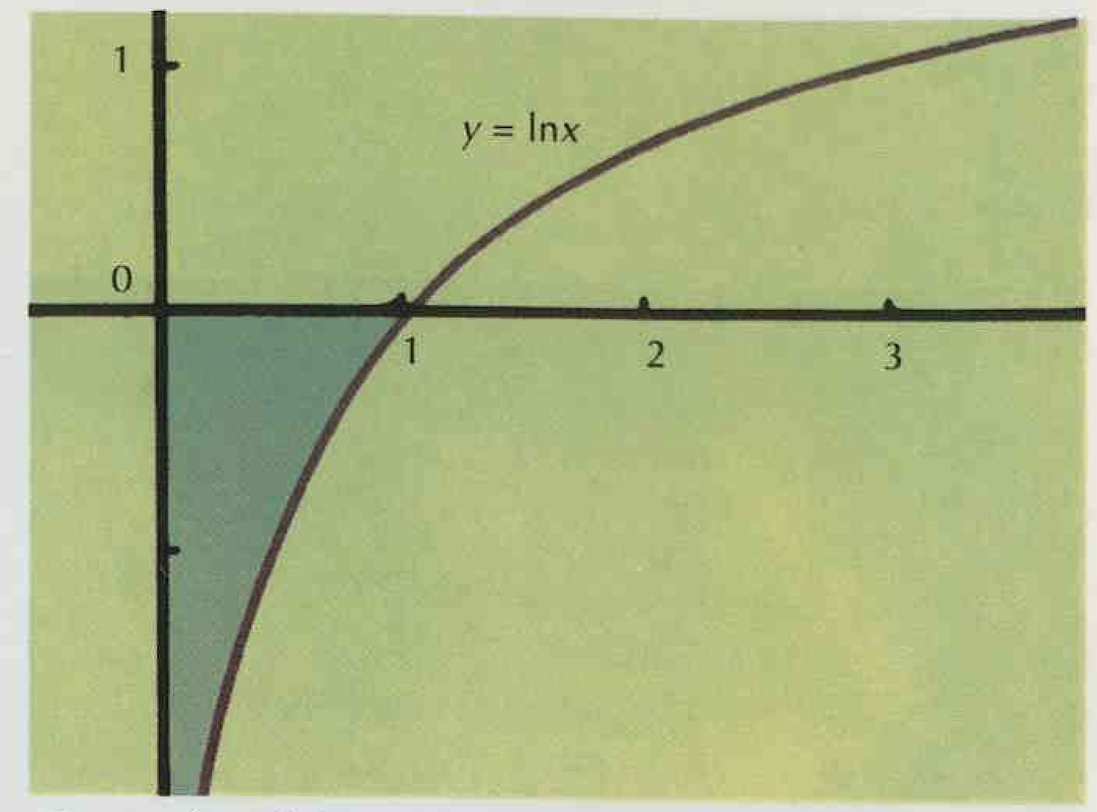


Fig. 2 – Área finita.

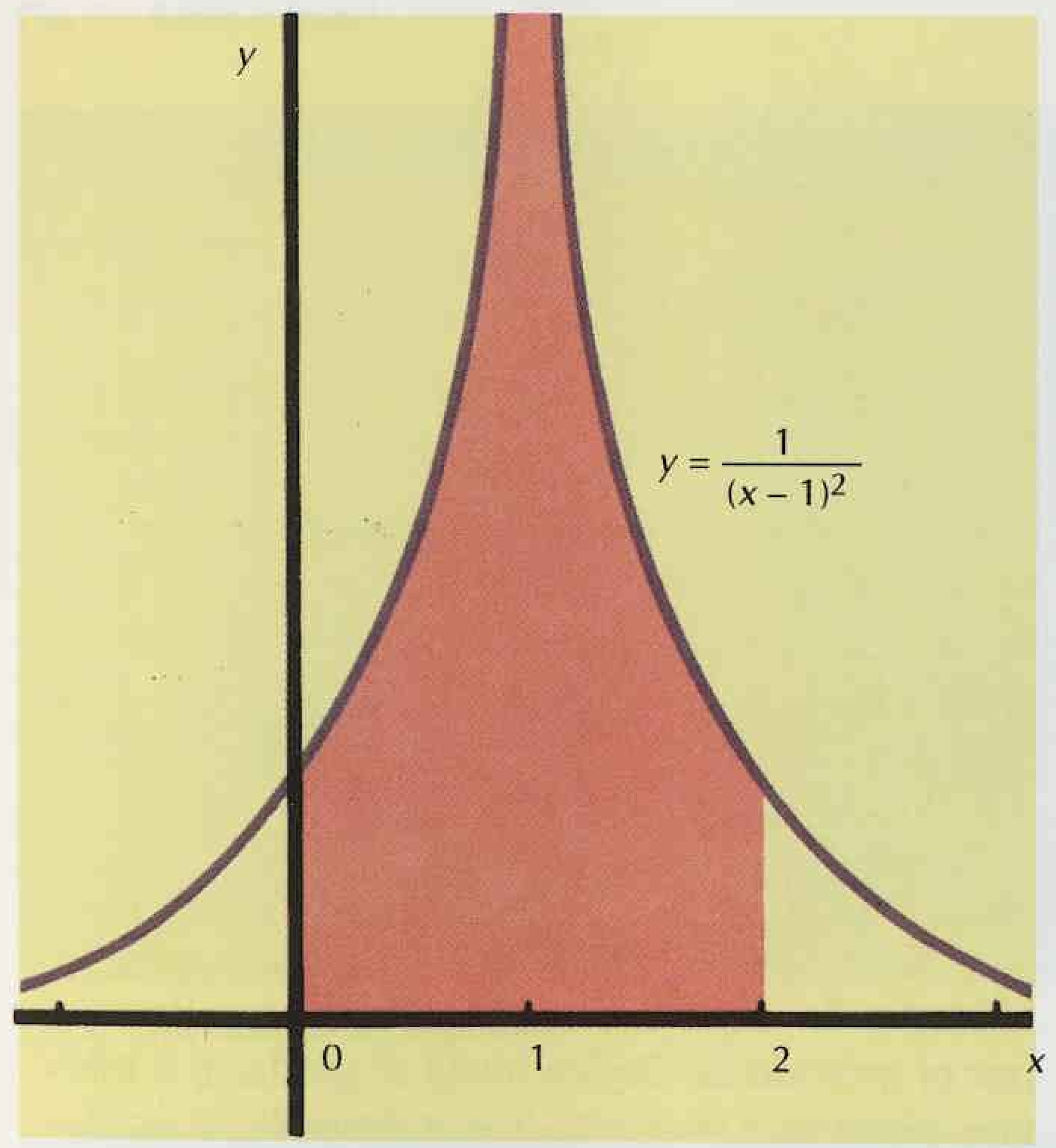


Fig. 3 – Área no finita.

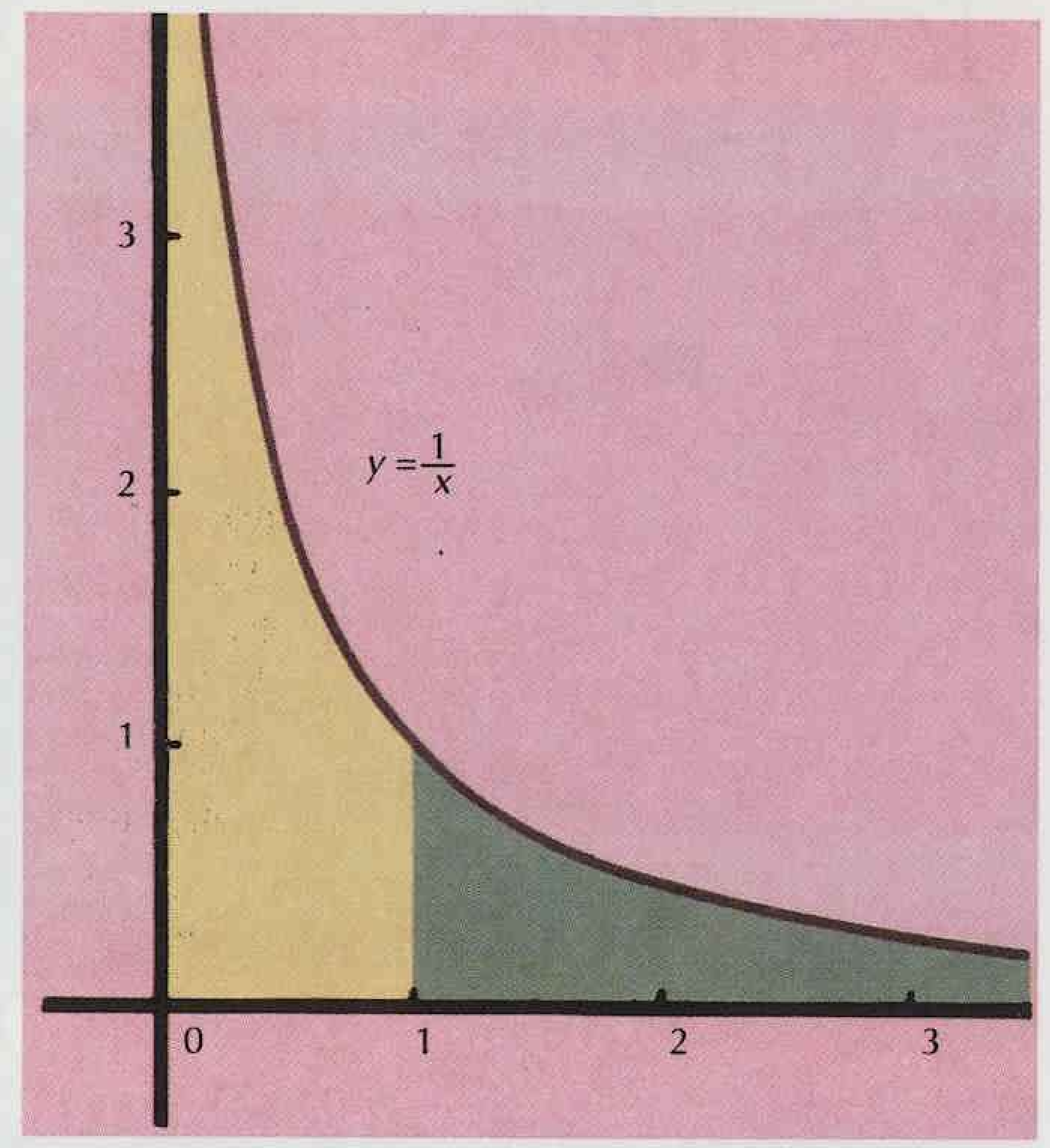


Fig. 4 – Áreas no finitas.

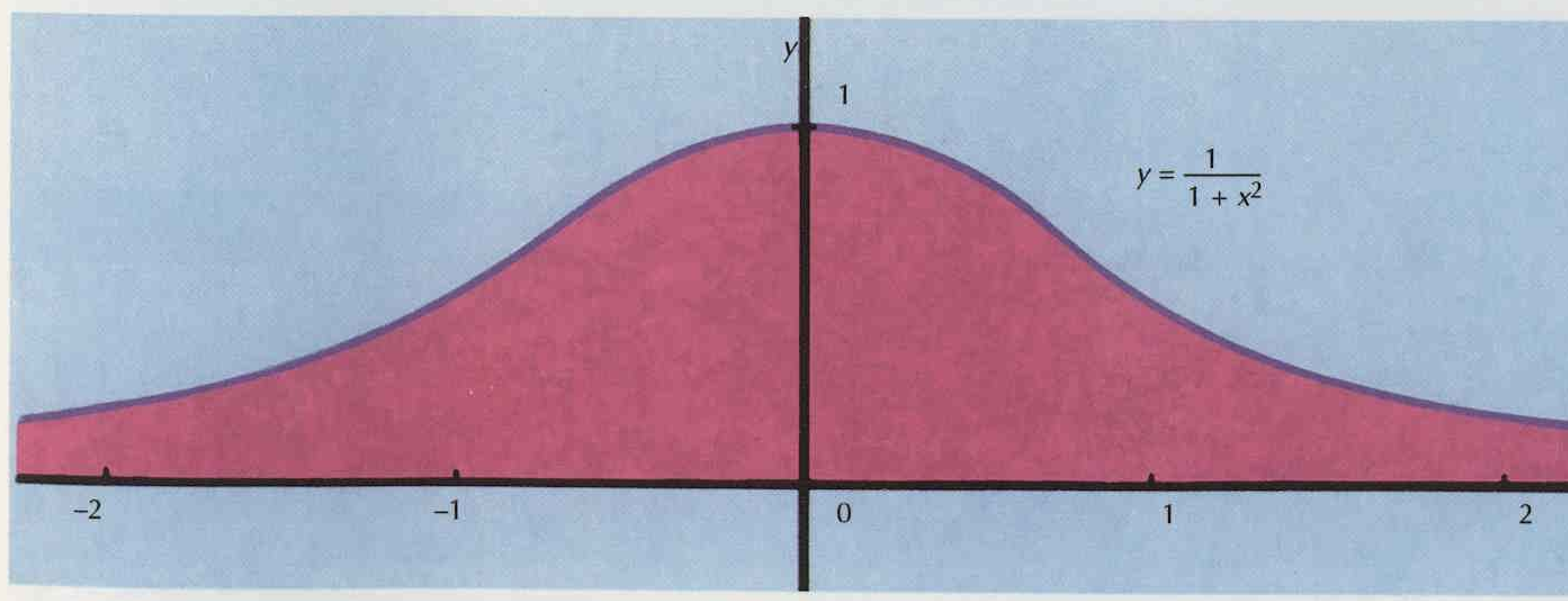


Fig. 5 – Área no finita.

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Cuando la integral $\int_a^b f(x)dt$ no puede calcularse mediante primitivas, ni como límite de sumas integrales, se recurre a métodos de evaluación aproximada.

Método de los trapecios. Consiste en subdividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n],$$

de igual longitud $\delta = x_{i+1} - x_i = (b-a)/n$

y en cada uno de ellos, poniendo $f(x_i) = y_i$, sustituir el arco de curva desde (x_i, y_i) a (x_{i+1}, y_{i+1}) por la recta que une estos puntos. Sumando las áreas –con signo– de estos trapecios (fig. 1), se obtiene la aproximación

$$\int_a^b f(x)\,dx = \delta\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right).$$

Si $M = máx|f''(x)|$ en $[a, b]$,

el error absoluto, E, se puede acotar mediante

$$E \le \frac{\delta^2}{12}(b-a)\,M.$$

Para conseguir un error inferior a ε habrá de tomarse $n \ge \dfrac{b-a}{\delta}$ donde δ se habrá tomado previamente de modo que cumpla $\delta^2 \le \dfrac{12\varepsilon}{(b-a)\,M}$

• **Ejemplo.** Hallar $A = \int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$ con error inferior a 0,015.

$$\text{Como } \left(\frac{e^x}{x}\right)'' = \frac{x^2 - 2x + 2}{x} \cdot e^x < 2e^2$$

en $[1, 2]$, será $\delta^2 \le \dfrac{12 \cdot 0{,}015}{2e^2} \simeq 0{,}0121$, por lo que podemos tomar $\delta = 0{,}11$, con lo que $n \ge \dfrac{1}{0{,}11} \simeq 9{,}09$, y bastará hacer $n = 10$. Será

$$A = 0{,}11 \cdot \left(\frac{e}{2} + \frac{e^2}{4} + \frac{3^{1,1}}{1{,}1} + \frac{e^{1,2}}{1{,}2} + \ldots + \frac{e^{1,4}}{1{,}9}\right) = 3{,}366719,$$

con error inferior a 15 milésimas.

Método de Simpson. Consiste en reemplazar el arco de curva por arcos de parábola (fig. 3). Entonces, si n es par y

$$T = y_0 + y_n,\quad I = y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1},$$

$$P = y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}$$

se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{\delta}{3}(T + 4I + 2P),$$

con error

$$E \le \frac{\delta^4}{180}(b-a)\cdot N,$$

siendo $N = máx\,|f^{IV}(x)|$ en $[a, b]$. Tomando

$$\delta^4 \le \frac{180c}{(b-a)\,N},\quad n \ge \frac{b-a}{\delta},$$

el error obtenido no excede ε .

• **Ejemplo.** Hallar ln2 con error inferior a una millonésima.
Buscaremos, por el Método de Simpson,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

Como $f^{IV}(x) = 24\,x^{-5} \le 24$, habrá de ser

$$\delta^4 \le \frac{180 \cdot 10^{-6}}{24} \simeq 0{,}000075$$

con lo que $\delta < 0{,}093$, $n < \dfrac{1}{0{,}9} = 11{,}1$ y tomaremos $n = 12$, $\delta = 1/12 = 0{,}8\overline{3}$, obteniendo los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}08\overline{3}$, $x_2 = 1{,}1\overline{6}$, $x_3 = 1{,}25$ y así sucesivamente hasta $x_{11} = 1{,}91\overline{6}$, $x_{12} = 2$. En este caso es $y_i = 1/x_i$, con lo que
$T = 1{,}5$, $I = 4{,}1488916$, $P = 3{,}428867$

$$\text{y es } \ln 2 \simeq \frac{0{,}08\overline{3}}{3}(T + 4I + 2P) = 0{,}693147.$$

Método de Taylor. Consiste en desarrollar $f(x)$ por el método de Taylor hasta el grado n, e integrar término a término. Naturalmente, si acotamos por K el resto enésimo, tendremos un error $\varepsilon \le K(b-a)$.

• **Ejemplo.**

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \simeq \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^8}{4!}\right) dx =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{9 \cdot 4!}\right) = 1{,}4618.$$

Como $R_n = \dfrac{e^\theta}{5!}\,x^{10}$ en $[0, 1]$ podemos acotar el error cometido por

$$\varepsilon \le \int_0^1 |R_n(x)|\,dx \le \frac{e}{11 \cdot 5!} < 0{,}0021.$$

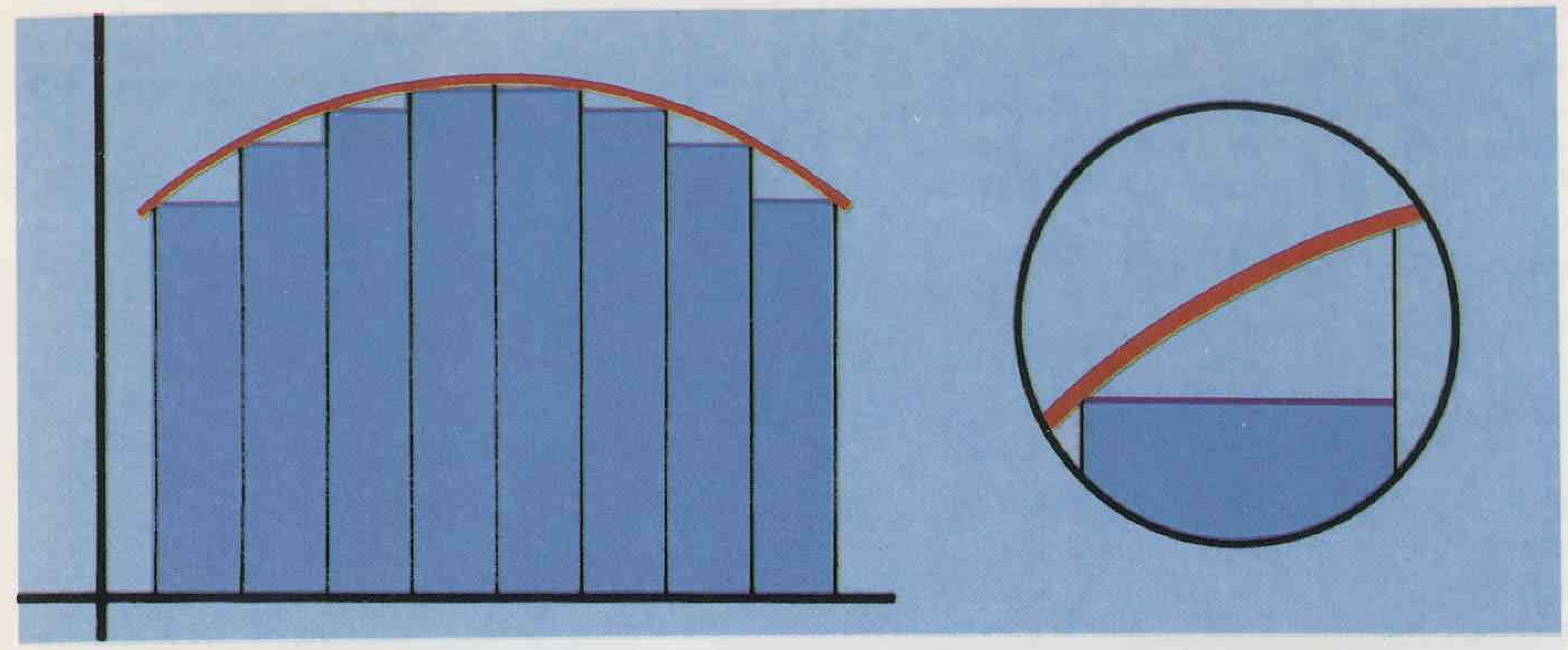


Fig. 1 – Suma integral.

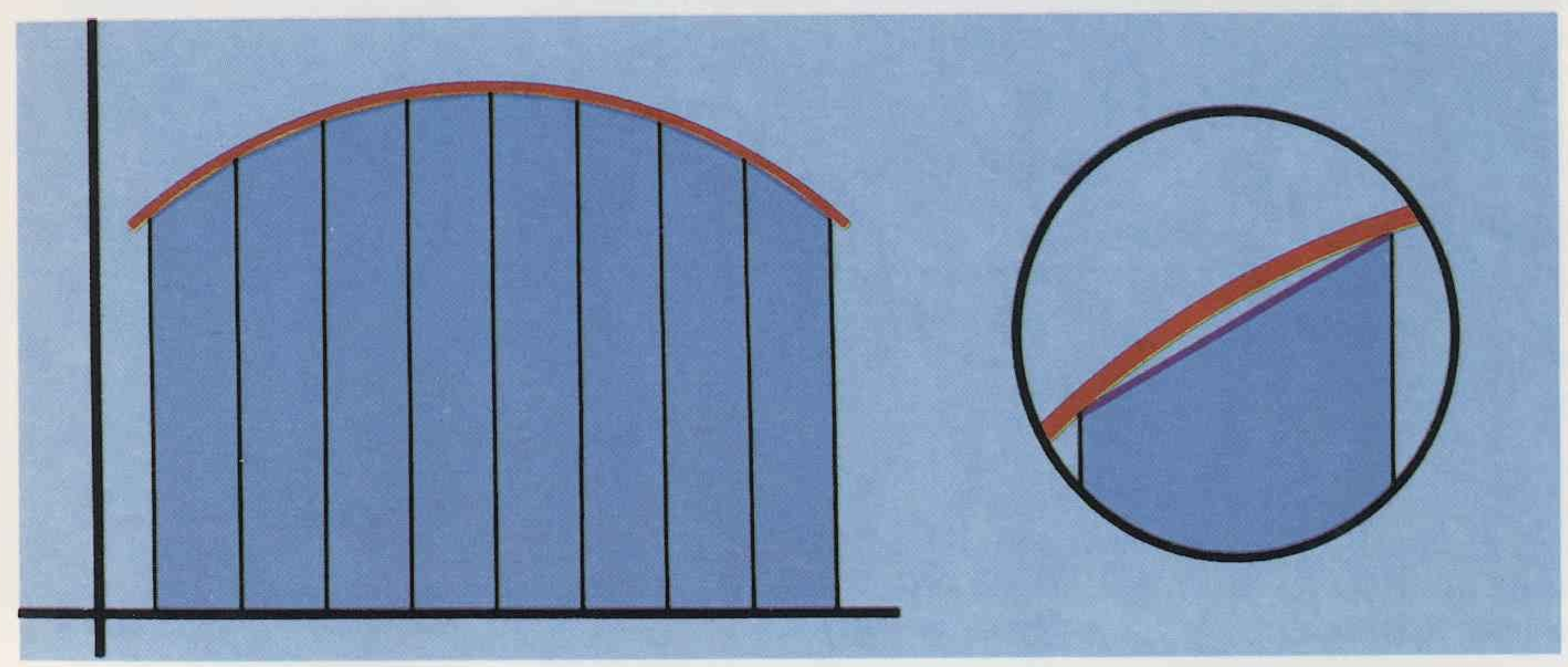


Fig. 2 – Método de los trapecios.

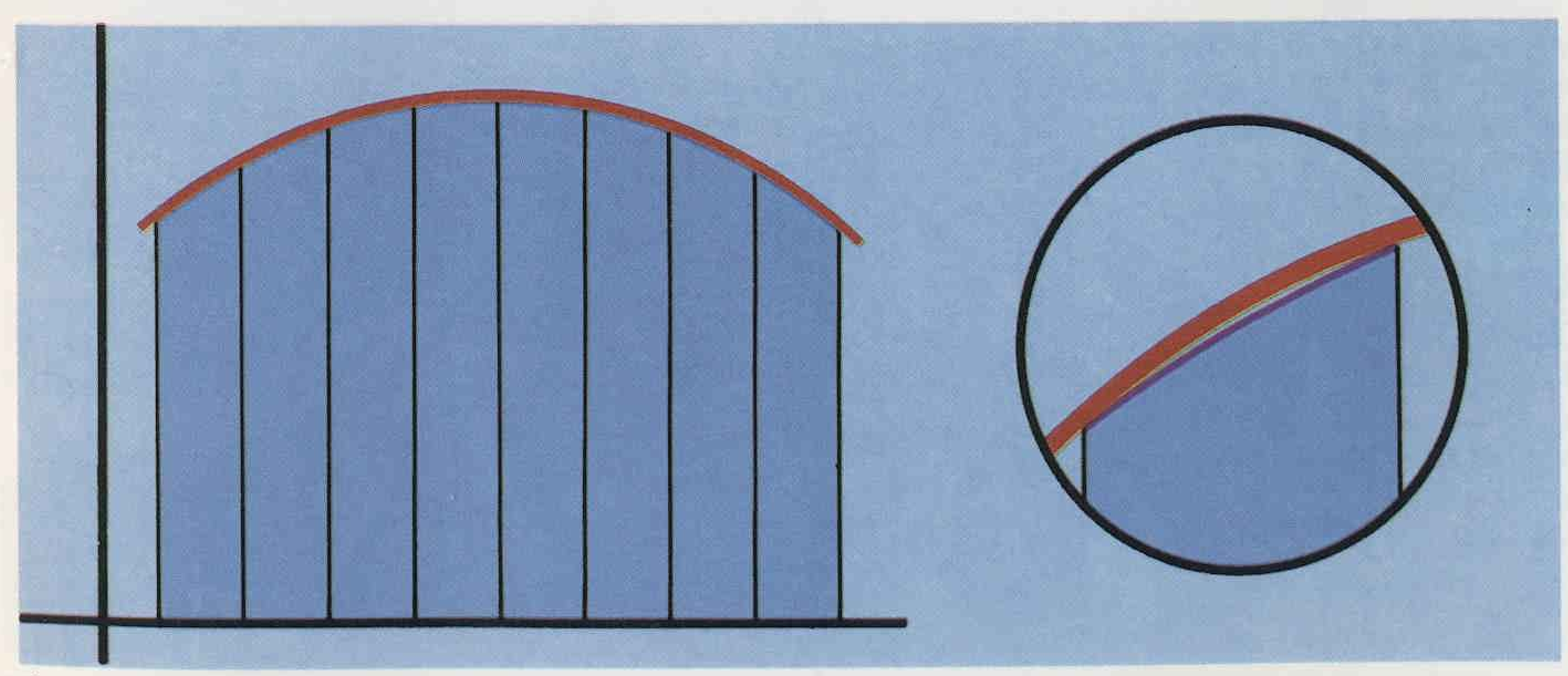


Fig. 3 – Método de Simpson.

SUCESIONES Y SERIES FUNCIONALES: DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN

Proposición. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones derivables tales que $\{f'_n\}$ converge uniformemente a g en (a, b) y en algún $x_0 \in (a, b)$ $\{f_n(x_0)\}$ converge, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en (a, b) hacia cierta f que, además, cumple $f'(x) = g(x)$.

Proposición. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones integrables que convergen uniformemente a f en $[a, b]$, entonces f es integrable y $\{\int_a^x f_n(t)dt\}$ converge uniformemente a $\int_a^x f(t)dt$.

Proposición. Si $\Sigma f_n(x)$ es una serie de funciones derivables tales que $\Sigma f'_n(x)$ converge uniformemente en (a, b) y en algún $x_0 \in (a, b)$ $\Sigma f_n(x_0)$ converge, entonces $\Sigma f_n(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$ y $(\Sigma f_n(x))' = \Sigma f'_n(x)$.

Proposición. Si $\Sigma f_n(x)$ es una serie de funciones integrables que converge a f en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Sigma_n \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Proposición. La suma de una serie de potencias $\Sigma\, a_n (x - x_0)^n$ es derivable e integrable en su dominio de convergencia absoluta, siendo su derivada y función integral las sumas de las correspondientes término a término.

Series de Taylor

Entre las series de potencias tienen singular interés las de Taylor: si f es infinitamente derivable en a, la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f^{n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

se llama *serie de Taylor de f* en a. Tal serie converge hacia $f(x)$ solamente cuando la sucesión de restos enésimos tiende a 0. Cualquier serie de potencias convergentes es, precisamente, la serie de Taylor de su función suma.

Series de Fourier

Condiciones de Dirichlet. Si f es una función de período $2P$, definida en $[0, 2P]$, salvo quizás en un número finito de puntos, tal que f y f' son continuas en $[0, 2P]$ salvo (salvo en finitos puntos), entonces la serie trigonométrica (o de Fourier)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{P} + b_n \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{P}\right)$$

cuyos coeficientes son

$$a_n = \frac{1}{P}\int_0^{2P} f(x) \cdot \cos \frac{\pi n x}{P} \cdot dx,$$

$$b_n = \frac{1}{P}\int_0^{2P} f(x) \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{P} \cdot dx,$$

converge hacia $f(x)$ si f es continua en x, y hacia $\frac{1}{2}(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x \to 0^+} f(x))$ en caso contrario. Los límites de integración 0, $2P$ pueden sustituirse por k, $k + 2P$ con $k \in \mathbf{R}$ cualquiera.

Criterio integral para series numéricas

Proposición. Si f es positiva y decreciente en $[1, +\infty)$ la serie $\Sigma\, f(n)$ converge si y sólo si es convergente la integral $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

- **Ejemplos.** La serie de términos positivos decrecientes $\Sigma\, n \cdot 2^{-n}$ converge, pues

$$\int_1^{+\infty} x \cdot 2^{-x}\, dx = \lim_{r\to+\infty} \left[-\frac{x \ln 2 + 1}{2^x \ln^2 2}\right]_1^r =$$

$$= \frac{1 + \ln 2}{2 \ln^2 2}$$

La función $f(x)$ de período 2π definida por $y = x$ en $[-\pi, \pi]$ (fig. 1) tiene el siguiente desarrollo de Fourier, cuyos coeficientes han sido hallados mediante las condiciones de Dirichlet,

$$f(x) = \frac{2}{1} \operatorname{sen} x - \frac{2}{2} \operatorname{sen} 2x + \ldots +$$

$$+ \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx + \ldots$$

....

El desarrollo en serie de potencias de arctg x es tedioso, pero como

$$(1/(1-x)) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

converge en $|x| < 1$, cambiando la variable por $-x^2$, e integrando, en $(-1, 1)$ será

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)}{2n+1} x^{2n} + \ldots$$

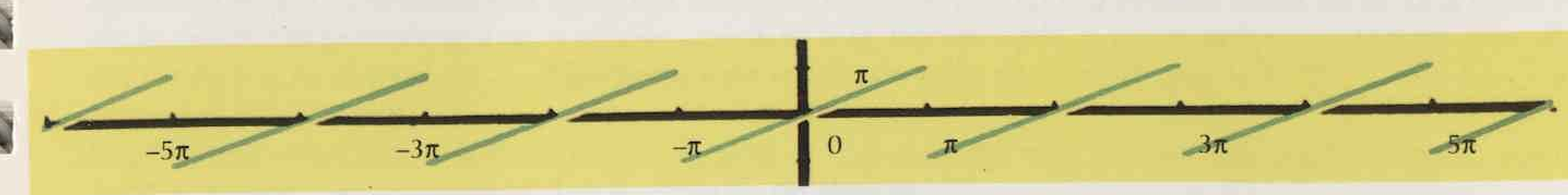


Fig. 1 – Función periódica.

Fig. 2 – Joseph Fourier (1768-1830).

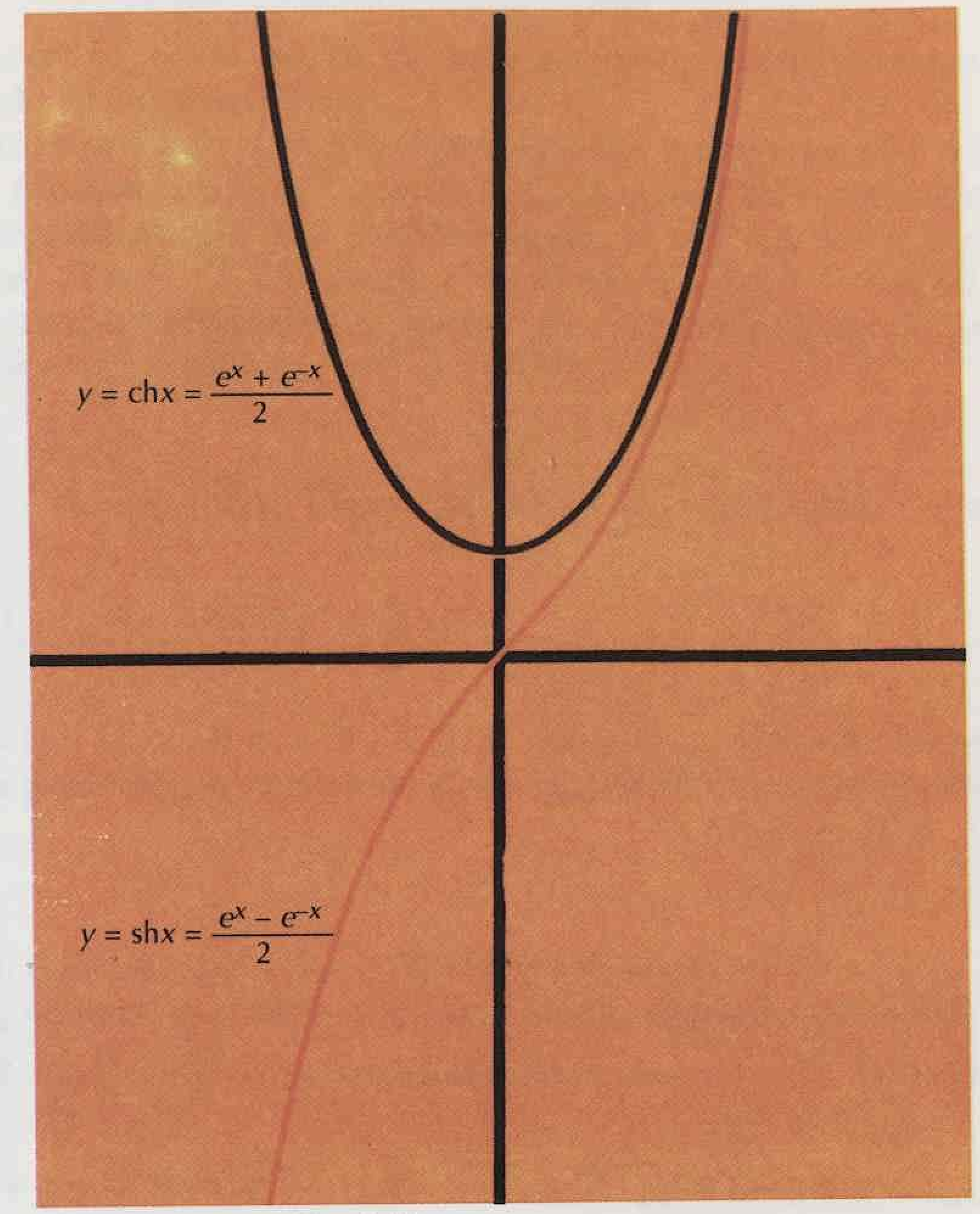


Fig. 3 – Funciones hiperbólicas.

Fig. 4 – Los cables suspendidos por sus extremos adoptan la forma de una catenaria, que es la de los cosenos hiperbólicos.

Ejercicio A/1-1. Demuéstrese que si la fracción racional p/q (p y q primos entre sí) es una solución de la ecuación polinómica $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$, donde cada a_i es un entero, entonces p es divisor de a_0 y q es divisor de a_n. Aplíquese este resultado para demostrar que $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$ y $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ son números irracionales.

Si p/q fuera solución, tendríamos $a_0 + a_1(p/q) + \ldots + a_n(p/q)^n = 0$, con lo que, multiplicando por q^n, $a_np^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1p\, q^{n-1} + a_0\, q^n = 0$, de donde

$$a_np^n = -q\,(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0q^{n-1}),\ a_0q^n = -p\,(a_1q^{n-1} + \ldots + a_np^{n-1}).$$

En la primera vemos que a_np^n es múltiplo de q, con lo que ha de serlo a_n, pues p es primo con q. Análogamente en la segunda a_0 es múltiplo de p por serlo a_0q^n.

Ahora vemos que $x^2 - 3 = 0$ no tiene solución racional, pues ésta habría de tener numerador ± 1 o ± 3 (divisores de $a_0 = 3$) y el denominador ± 1 (divisores de $a_2 = 1$), pero -1, 1, -3, 3 no tienen cuadrado 3. Del mismo modo se ve que $\sqrt[3]{7} \notin \mathbf{Q}$ considerando $x^3 - 7 = 0$. Finalmente, si $\sqrt{2} + \sqrt{5} = x$, elevando al cuadrado, $x^2 = 7 + 2\sqrt{10}$ o sea $x^2 - 7 = 2\sqrt{10}$; elevando al cuadrado $x^4 - 14x^2 + 49 = 40$, o sea $x^4 - 14x^2 + 9 = 0$, que sólo podría tener las soluciones racionales ± 1, ± 3, ± 9, ninguna de las cuales cumple la ecuación, de donde resulta lo propuesto.

Ejercicio A/3-1. Resolver la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$. Descomponer en $\mathbf{C}$ el polinomio de la izquierda.

$$\text{Será } x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Tendremos $x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 3^2 = [x - (2 + 3i)]\,[x - (2 - 3i)]$. El polinomio carece de raíces reales, por lo que no admite divisores de grado 1 con coeficientes reales, pero sí con coeficientes complejos.

Ejercicio A/3-2. Hallar $\sqrt[n]{r_\alpha}$ en forma polar. Aplíquese para descomponer (en $\mathbf{R}$) el polinomio $x^4 + 1$.

Si una solución es s_β, ha de ser $(s_\beta)^n = r_\alpha$ o sea $s^n = r$, $n\beta - \alpha = 2k\pi$. De ello resultan como argumentos posibles $\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot 2, \ldots, \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}(n-1)$ y el módulo ha de ser $s = \sqrt[n]{r}$, la única raíz enésima real y positiva de r.

Para descomponer $x^4 + 1$, resolvemos $x^4 + 1 = 0$. Será $x^4 = -1$, $x = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_\pi}$ por lo que $x = 1_{\pi/4}$, $x = 1_{3\pi/4}$, $x = 1_{5\pi/4}$, $x = 1_{7\pi/4}$. Así pues

$$x^4 + 1 = (x - 1_{\pi/4})\,(x - 1_{7\pi/4})\,(x - 1_{3\pi/4})\,(x - 1_{5\pi/4}) =$$

$$= \left[x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]\left[x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]\left[x - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]\left[x - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right] =$$

$$= \left[\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\left[\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] = \left(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1\right)$$

Ejercicio B/1-1. Estudiar la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la sucesión de término general $a_n = \frac{7n+3}{2n+1}$, así como su acotación.

Los cinco primeros términos de la sucesión son $\frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \frac{24}{7}, \frac{31}{9}$ y $\frac{38}{11}$, cada uno de ellos mayor que el anterior, lo que sugiere que comprobemos si es creciente:

$$a_n < a_{n+1} \text{ equivale a } \frac{7n+3}{2n+1} < \frac{7\,(n+1)+3}{2\,(n+1)+1} \quad \text{o sea} \quad \frac{7n+3}{2n+1} < \frac{7n+10}{2n+2};$$

al ser los denominadores positivos para todo n, podemos multiplicar por ambos los dos miembros de la desigualdad, sin que ésta altere su sentido, con lo que $a_n < a_{n+1}$ equivale ahora a $(7n + 3)(2n + 2) < (2n + 1)(7n + 10)$ es decir $14n^2 + 20n + 6 < 14n^2 + 27n + 10$ que simplificada es $0 < 7n + 4$. Al ser esta última cierta para todo $n \in \mathbf{N}$, lo mismo ocurre con la primera de la cadena de desigualdades equivalentes, luego la sucesión cumple $a_n < a_{n-1}$ $\forall$ n, siendo estrictamente creciente.

Como sus términos son todos positivos, tenemos la acotación $0 < a_n$. Para n muy grande $7n + 3$ es muy parecido a $7n$ y $2n + 1$ lo es a $2n$, lo que sugiere que a_n será muy semejante a 7/2. Parece, pues, razonable, intentar demostrar la acotación $a_n < 4$. Ello equivaldría a $\dfrac{7n+3}{2n+1} < 4$ que, a su vez, equivale a $7n + 3 < 8n + 4$ y ésta a $0 < n + 1$ que se satisface para todo n natural, con lo que $0 < a_n < 4$ $\forall$ $n \in N$ y la sucesión está acotada.

Ejercicio B/1-2. La sucesión de término general $c_n = \dfrac{3n+5}{4n+12}$ tiene límite $\dfrac{3}{4}$. Hállese el lugar a partir del cual los términos de la sucesión difieren del límite en menos de 0,000001.

La sucesión crece estrictamente, manteniéndose todos los términos por debajo del límite. Queremos que $\dfrac{3}{4} - c_n < 0{,}000001$, es decir $\dfrac{3}{4} - \dfrac{3n+5}{4n+12} < 0{,}000001$, lo que podemos escribir $\dfrac{3(n+3)-(3n+5)}{4n+12} < 0{,}000001$ o también $\dfrac{1}{n+3} < 0{,}000001$, lo que equivale a $\dfrac{1}{0{,}000001} < n+3$, es decir $1000000 < n + 3$, lo que sucede desde $n = 999998$ en adelante.

Obsérvese que la diferencia $\dfrac{3}{4} - c_n = \dfrac{1}{n+3}$, aunque se hace menor que cualquier número previamente escrito, por pequeño que sea siempre es positiva. Es decir, los términos se acercan al límite tanto como sea imaginable, pero nunca lo alcanzan.

Ejercicio B/2-1. Hallar $\lim \left[\sqrt{9n^4 - n + 3}/(2n^2 + 3n - 1)\right]$.

Para resolver esta indeterminación ∞/∞ dividiremos numerador y denominador por n^2 que es el mayor grado presente,

$$\lim \frac{\sqrt{9n^4 - n + 3}}{2n^2 + 3n - 1} = \lim \frac{\dfrac{\sqrt{9n^4 - n + 3}}{n^2}}{\dfrac{2n^2 + 3n - 1}{n^2}} = \lim \frac{\sqrt{9 - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{3}{n^4}}}{2 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{1}{n^2}} = \frac{3}{2}$$

Ejercicio B/2-2. Calcular $\lim (2n - \sqrt{4n^2 - 3n + 2})$.

$$\lim (2n - \sqrt{4n^2 - 3n + 2}) = \lim \frac{(2n - \sqrt{4n^2 - 3n + 2})(2n + \sqrt{4n^2 - 3n + 2})}{2n + \sqrt{4n^2 - 3n + 2}} =$$

$$= \lim \frac{4n^2 - (4n^2 - 3n + 2)}{2n + \sqrt{4n^2 - 3n + 2}} = \lim \frac{3n - 2}{2n + \sqrt{4n^2 - 3n + 2}} =$$

$$= \lim \frac{3 - \dfrac{2}{n}}{2 + \sqrt{4 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{2}{n^2}}} = \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}.$$

Ejercicio B/2-3. Hallar $\lim e^n$, $\lim (\sqrt{3}/2)^n$, $\lim (-\sqrt{2})^n$, $\lim (-\sqrt{0{,}5})^n$.

$\lim e^n = +\infty$, pues $e > 1$. Como $0 < (\sqrt{3}/2) < 1$, $\lim (\sqrt{3}/2)^n = 0$. Al ser $\sqrt{2} > 1$, es $\lim (\sqrt{2})^n = +\infty$, $\lim (-\sqrt{2})^n = \infty$ (sin signo, por irse alternando en la sucesión). De $0 < \sqrt{0{,}5} < 1$ llegamos a $\lim (-\sqrt{0{,}5})^n = 0$, donde el signo hace que la tendencia a 0 se haga «saltando» de positivos a negativos y al revés.

Ejercicio B/2-4. Calcular $\lim 4^{(4 - n^2)/(4 + n)}$, $\lim 16^{(n + 3)/(2n + 1)}$, $\lim \left(\dfrac{1+n}{n^2+3}\right)^{n^2}$ y $\lim 2^{5n^3/(3n + 2)}$, $\lim [n^3/(5n^3 + 7)]^{(3 - n^2)/(4 - n)}$.

Recordemos que estos límites se resuelven con $\lim (a_n{}^{b_n}) = [\lim a_n]^{\lim b_n}$, siendo indeterminados tan sólo 0^0, ∞^0 y 1^∞. Así pues,

$$\lim 4^{(4 - n^2)/(4 + n)} = 4^{-\infty} = 0,\ \lim 16^{(n + 3)/(2n + 1)} = 16^{1/2} = 4,\ \lim \left(\frac{1+n}{n^2+3}\right)^{n^2} = 0^{+\infty} = 0,$$

$$\lim 2^{5n^3/(3n + 2)} = 2^{+\infty} = +\infty,\ \lim \left(\frac{n^3}{5n^3+7}\right)^{(3 - n^2)/(4 - n)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{+\infty} = 0.$$

Ejercicio B/2-5. Determinar $\lim \left(\dfrac{7n-2}{7n+3}\right)^{3n-5}$.

Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Entonces

$$\lim \left(\frac{7n-2}{7n+3}\right)^{3n-5} = \lim \left(1 + \frac{-5}{7n+3}\right)^{(3n-5)} = \lim \left(1 + \frac{1}{\dfrac{7n+3}{-5}}\right)^{\frac{7n+3}{-5}\left(\frac{-5}{7n+3}(3n+5)\right)} =$$

$$= e^{\lim \left(\frac{-5(3n-5)}{7n+3}\right)} = e^{-\frac{15}{7}}.$$

Ejercicio B/2-6. Hallar $\lim \left(\dfrac{n^2 - 5n + 6}{n^2 - 2n + 1}\right)^{(n^2 + 5)/(n + 1)}$.

Es indeterminación del tipo 1^∞. La división polinómica de $n^2 - 5n + 6$ por $n^2 - 2n + 1$ nos da cociente 1 y resto $5 - 3n$, por lo que

$$\lim \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 - 2n + 1}\right)^{(n^2 + 6)/(n + 1)} = \lim \left(1 + \frac{5 - 3n}{n^2 - 2n + 1}\right)^{(n^2 + 5)/(n + 1)} =$$

$$\lim \left(1 + \frac{5 - 3n}{n^2 - 2n + 1}\right)^{\frac{n^2 - 2n + 1}{5 - 3n}\left(\frac{5 - 3n}{n^2 - 2n + 1} \cdot \frac{n^2 + 5}{n + 1}\right)} = e^{\lim \frac{-3n^2 + 5n^2 - 15n + 25}{n^3 - n^2 - n + 1}} = e^{-3}.$$

Ejercicio B/2-7. Hallar $\lim \sqrt[n]{n}$.

Consideremos la sucesión $a_n = n$. Como $a_n > 0$ $\forall$ n, y $\lim \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \lim \dfrac{n}{n-1} = 1$, aplicando el criterio de la raíz, tenemos $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

Ejercicio B/2-8. Hallar $\lim \sqrt[n]{n!}$

Consideremos la sucesión $a_n = n$. Se tiene $\lim a_n = +\infty$. Aplicando ahora el criterio de la media geométrica,

$$\lim \sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = +\infty$$

Ejercicio B/2-9. Hallar $\lim \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

El límite del numerador es $+\infty$, según se ha visto en B/2-8, luego estamos ante una indeterminación ∞/∞. Aplicando la fórmula de Stirling, se tiene

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim \frac{\sqrt[n]{e^{-n} \cdot n^n \cdot (2\pi n)^{1/2}}}{n} = \lim \frac{e^{-1} \cdot n \cdot (2\pi)^{1/2n} \cdot n^{1/2n}}{n} = e^{-1} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{e}$$

donde se ha hecho que $\lim n^{1/2n} = \lim (n^{1/n})^{1/2} = 1^{1/2} = 1$, usando B/2-7.

Ejercicio B/2-10. Calcular $\lim \dfrac{1^2 + 2 + \ldots + n^2}{n^3}$.

Consideremos las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ definidas por $a_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ y $b_n = n^3$. Ambas divergen a $+\infty$. Además

$$\lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim \frac{(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - (1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2)}{n^3 - (n-1)^3} = \lim \frac{n^2}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{1}{3},$$

por lo que, aplicando el Criterio de Stolz, $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{3}$, que es el límite buscado.

Ejercicio B/3-1. Estudiar la convergencia de la serie $\Sigma \dfrac{7n^2 - 2n + 3}{3n^3 + 5n - 2}$.

Haciendo cociente comparativo con la armónica

$$\lim \left[\left(\frac{7n^2 - 2n + 3}{3n^3 + 5n - 2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{n}\right)\right] = \lim \frac{7n^3 - 2n^2 + 3n}{3n^3 + 5n - 2} = \frac{7}{3};$$

éste es un real no nulo, luego ambas tienen el mismo carácter, y la serie estudiada diverge.

Ejercicio B/3-2. Estudiar la convergencia de la serie $\Sigma \left(\dfrac{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{4 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (4n)}\right)^2$.

Utilicemos el Criterio de Raabe. Como

$$a_{n+1}/a_n = \left(\frac{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n+1)}{4 \cdot 8 \ldots \cdot (4n+4)}\right)^2 \Big/ \left(\frac{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{4 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}\right)^2 = \left(\frac{4n+1}{4n+4}\right)^2$$

será $\lim n\left(1 - \left(\dfrac{4n+1}{4n+4}\right)^2\right) = \lim n \cdot \dfrac{(4n+4)^2 - (4n+1)^2}{(4n+4)^2} = \lim \dfrac{40n^2 + 15n}{16n^2 + 32n + 16} = \dfrac{40}{16}$, por lo que converge. Obsérvese que al ser $\lim (a_n/a_{n-1}) = 1$, el Criterio de la razón no hubiera decidido.

Ejercicio B/3-3. Estudiar la convergencia de $\Sigma \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n(3n-1)}$.

La serie $\Sigma \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ es convergente, pues es una geométrica de razón $-1/2$. En consecuencia, sus sumas parciales están acotadas. Ademas, la sucesión $\left\{\dfrac{1}{3n-1}\right\}$ es decreciente y acotada. Aplicando el Criterio de Dirichlet, vemos ahora que la serie objeto de estudio converge.

Ejercicio B/3-4. Estudiar la convergencia de la serie $\Sigma \dfrac{(n+1)!}{n^n}$.

Aplicando el Criterio de la razón, veamos que converge:

$$\lim (a_{n+1}/a_n) = \lim \left[\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right) \Big/ \left(\frac{n!}{n^n}\right)\right] = \lim \frac{(n+1)!\,n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1} \cdot \frac{-1}{n+1} \cdot n} = e^{\lim \frac{-n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Ejercicio B/3-5. Estudiar la convergencia de $\Sigma \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$.

Como la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ es decreciente, $\Sigma \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$ y $\Sigma 2^n \cdot \dfrac{1}{n \cdot 2^n} = \Sigma \dfrac{1}{n}$ convergen o divergen ambas, por Criterio de Knopp. Pero esta última es la serie armónica, divergente, con lo que también diverge la estudiada.

Ejercicio B/3-6. Estudiar la convergencia de la serie $\Sigma \left(\dfrac{4n}{7n-1}\right)^{3n-1}$.

Aplicando el Criterio de la raíz:

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{4n}{7n-1}\right)^{3n-1}} = \lim \left(\frac{4n}{7n-1}\right)^{(3n-1)/n} = \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{64}{343} < 1, \text{ luego la serie converge.}$$

Ejercicio B/3-7. Estudiar la serie $\Sigma\, (-1)^{n+1} \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n$.

Se trata de una serie alternada en la que, si a_n es un término enésimo, $\{|a_n|\} = \left\{\dfrac{n+1}{2n+1}\right\}$ es decreciente, y $\lim a_n = \lim (-1)^{n+1} \cdot \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n = 0$, luego converge.

Ejercicio C/1-1. Hallar los dominios de las funciones I) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, II) $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$, III) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{(x-1)(x+3)}$, IV) $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3} - 1}$, V) $k(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$

I. Numerador y denominador de f tienen sentido $\forall\, x \in \mathbf{R}$, pero el cociente no es posible si el denominador, $x - 2$, es cero, o sea cuando $x = 2$, luego Dom $f = \mathbf{R} - \{2\}$.

II. Sólo poseen raíz cuadrada real los números no negativos, luego habrá de ser $x^2 - 16 \geq 0$, es decir, $(x+4)(x-4) \geq 0$, lo que sucede cuando o bien $x + 4 \geq 0$ y $x - 4 \geq 0$, o bien $x + 4 \leq 0$ y $x - 4 \leq 0$, lo que se puede reducir a las situaciones $x \leq -4$ o $x \geq 4$. Luego Dom $g = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

III. El numerador de h sólo tiene sentido en $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ (lo que se ve como en II). El denominador, siempre posible, es nulo cuando $x = 1$ o $x = -3$, valores que imposibilitarían la división. Por tanto, Dom $h = (-\infty, -3) \cup [3, +\infty)$.

IV. Habrá de ser $x - 3 \geq 0$, es decir, $x \geq 3$, para que sea posible la raíz que aparece en el denominador. Pero se habrá de excluir $x = 4$ pues en tal caso el denominador es cero. Así pues, Dom $j = (3, 4) \cup (4\cancel{, +\infty)}$.

V. Ha de ser $4 \geq \sqrt{x^2 - 9}$ por lo que será $16 \geq x^2 - 9$, $25 \geq x^2$, luego $x \in [-5, 5]$. Pero, además, ha de ser $x^2 - 9 \geq 0$, o sea $x^2 \geq 9$, con lo que $x \notin (-3, 3)$. Por lo tanto, Dom $k = [-5, -3] \cup [3, 5]$.

Ejercicio C/1-2. Sean $f(x) = 1 + x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$. Hállense $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ y $f \circ h \circ g$.

$$(h \circ g \circ f)\,(x) = (h \circ g)\,(1 + x) = h(g(1 + x)) = h(1 + x^2 + 2x) = \frac{1}{1 + x^2 + 2x}$$

$$(g \circ f \circ h)\,(x) = (g \circ f)\left(\frac{1}{x}\right) = g\left(1 + \frac{1}{x}\right) = g\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}$$

$$(f \circ h \circ g)\,(x) = (f \circ h)\,(x^2) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

Ejercicio C/1-3. Hallar la función inversa de $f(x) = \sqrt{x-1}$ y su dominio.
El recorrido de f es $\mathbf{R}^+$, por su definición. Si $b = \sqrt{a-1}$ será $b^2 = a - 1$, $a = b^2 + 1$. Por tanto, la inversa de f es $f^{-1} : \mathbf{R}^+ \to [1, +\infty)$ definida por $f^{-1}(x) = x^2 + 1$. Podemos comprobarlo:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = (x-1) + 1 = x$$

$$(f \circ f^{-1}) = f(x^2+1) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = x \text{ (pues } x \in \mathbf{R}^+\text{)}.$$

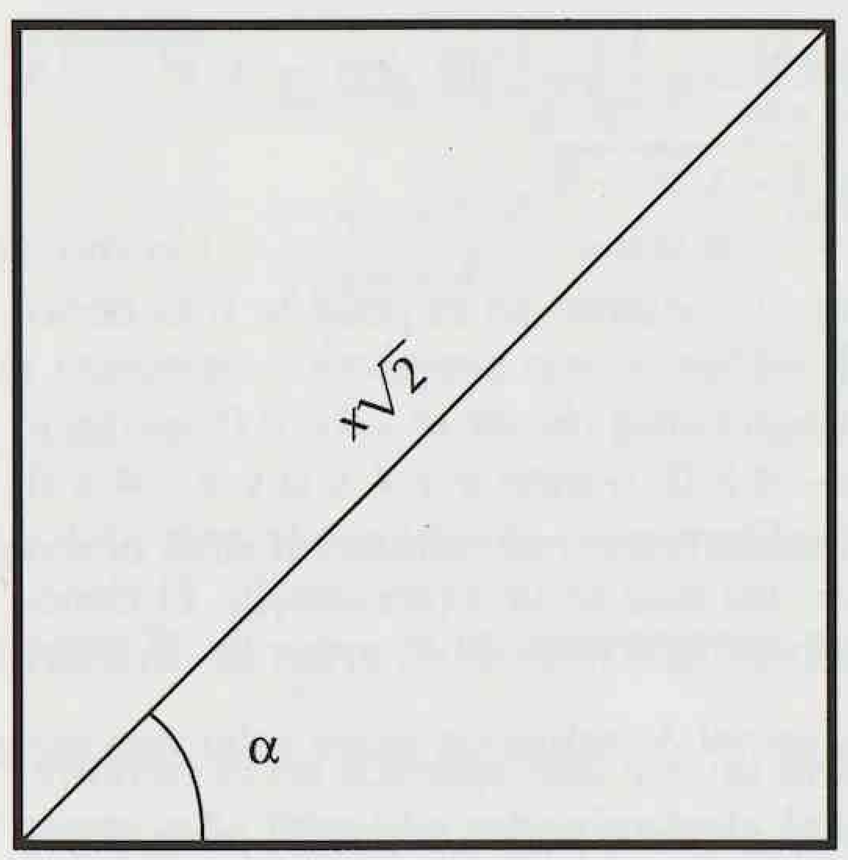
Ejercicio C/2-1. Hállense los valores de las funciones trigonométricas en $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{4}$.

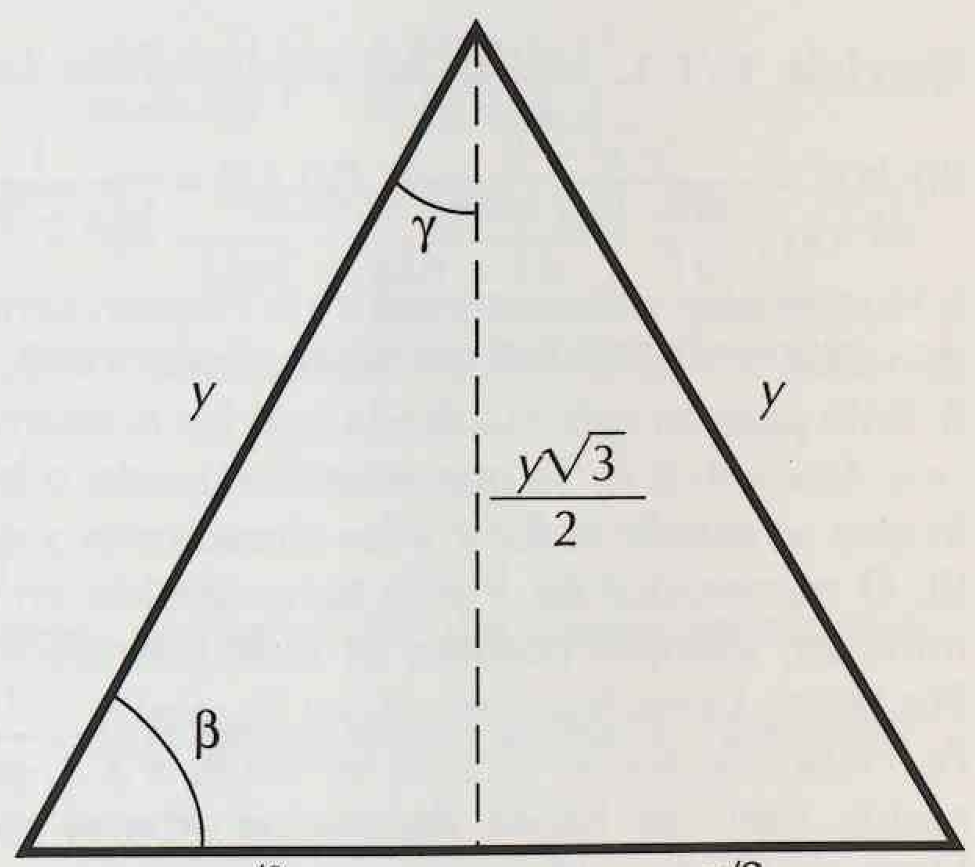
Puesto que seno, coseno y tangente de los números $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{4}$ son el seno, coseno y tangente, respectivamente, de los ángulos de medida respectiva en radianes $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{4}$, que en grados sexagesimales miden 60°, 30° y 45°, podemos apoyarnos en las figuras adjuntas:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} 45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{x}{x} = 1,$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen}\beta = \frac{y\sqrt{3}/2}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{\pi}{3} = \cos\beta = \frac{y/2}{y} = \frac{1}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{y\sqrt{3}/2}{y/2} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$





Ejercicio C/2-2. Hallar $x \in [0, \pi]$ tal que $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}x = 4 \operatorname{sen}^2 x$.
La ecuación se puede escribir $\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}x}{\cos x} = 4\operatorname{sen}^2 x$, o sea $\sqrt{3}\operatorname{sen}x = 4 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$. Salvo que $\operatorname{sen}x = 0$, en cuyo caso $x = 0$ $x = \pi$, podemos simplificar y tendremos $\sqrt{3} = 4 \operatorname{sen}x \cdot \cos x$. Como $\operatorname{sen}2x = \operatorname{sen}(x + x) = 2\operatorname{sen}x \cdot \cos x$, la última ecuación puede escribirse $\sqrt{3} = 2\operatorname{sen}2x$, es decir $\operatorname{sen}2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ por lo que $2x = \pi/3$ o $2x = 2\pi/3$. Las soluciones son, pues, $x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{\pi}{3}$.

Ejercicio C/2-3. Buscar solución, en $[0, \pi]$ al sistema $\begin{cases} x - y = \pi/2 \\ \operatorname{sen}x = \operatorname{sen}y \end{cases}$

Despejando x en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda $\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}y$, pero $\operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$ es $\cos y$, luego ha de ser $\operatorname{sen}y = \cos y$, o sea $\operatorname{tg}y = 1$, $y = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

Ejercicio C/2-4. Resolver en $\mathbf{R}$ la ecuación $\log_2 x^2 - \log_2\left(x - \frac{3}{4}\right) = 2$.

Como $\log_a p - \log_a q = \log_a (p/q)$ la ecuación se puede escribir $\log_2\left(\frac{x^2}{x - (3/4)}\right) = 2$ por lo que $\frac{x^2}{x-(3/4)} = 4$, o sea $x^2 = 4x - 3$, $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x = 1$ o $x = 3$.

Ejercicio C/2-5. Resolver el sistema $\begin{cases} x + y = 25 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$
La segunda ecuación puede escribirse $\log(x \cdot y) = 2$, por lo que $x \cdot y = 10^2$. Como $y = 25 - x$, será $x(25 - x) = 100$, o sea $x^2 - 25x + 100 = 0$, $x = 5$ o $x = 20$ (e $y = 20$ o $y = 5$, respectivamente).

Ejercicio C/3-1. Estudiar la convergencia puntual de la sucesión funcional $\{f_n(x) = x^{2n}\}$.
Sea $\alpha \in \mathbf{R}$. $\lim \alpha^{2n}$ es 0 si $\alpha \in (-1, 1)$, es 1 si $\alpha = \pm 1$ y ningún número real si $|\alpha| > 1$. Luego si consideramos $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definida por $f(1) = f(-1) = 1$, $f(x) = 0$ si $x \in (-1, 1)$, tendremos que $\lim f_n = f$ en $[-1, 1]$ (el lector que haya llegado a D/2 observará que la convergencia no es uniforme, pues, en tal caso, por ser las f_n continuas en todo $\mathbf{R}$, lo sería también f, que, sin embargo, no lo es en ± 1).

Ejercicio C/3-2. Estudiar la convergencia de Σx^n (serie geométrica de razón x).
Como $\lim\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim |x|$, el Criterio de la razón para series numéricas nos asegura la convergencia en $-1 < x < 1$. En -1 y en 1 diverge (pues $\lim a_n \neq 0$). Además la suma enésima $s_n = x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x - x \cdot x^{n-1}}{1-x} = \frac{x(1 - x^{n-1})}{1-x}$ por lo que la suma de la serie en su dominio de convergencia es

$$\lim s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x(1-x^{n-1})}{1-x} = \frac{x}{1-x} \text{ ya que } \lim_{n\to+\infty} x^{n-1} = 0 \text{ al ser } |x| < 1.$$

Ejercicio C/3-3. Estudiar la serie $\Sigma \frac{3^n}{(n+1)!}\cos nx$.

Como $\left|\frac{3^n}{(n+1)!}\cos nx\right| \leq \frac{3^n}{(n+1)!}$, el Criterio de Weierstrass nos dice que de converger la serie numérica $\Sigma \frac{3^n}{(n+1)!}$, la serie funcional lo haría absoluta y uniformemente en todo $\mathbf{R}$. Pero, aplicando a la numérica el Criterio de la razón, vemos que converge, pues

$$\lim\left[\left(\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}\right)\Big/\left(\frac{3^n}{(n+1)!}\right)\right] = \lim \frac{3}{n+2} = 0 < 1.$$

Ejercicio C/3-4. ¿Dónde converge $\Sigma \dfrac{1}{n(1+x^2)^n}$?

Se tiene $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\dfrac{1}{(n+1)(1+x^2)^{n+1}}\right)\Big/\left(\dfrac{1}{n(1+x^2)^n}\right)\right]=\begin{cases}<1 \text{ si } x\neq 0\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}$

luego la serie converge $\forall\, x \neq 0$.

Ejercicio C/3-5. Hallar el radio de convergencia de las series de potencias

$$\Sigma\,\frac{n-2}{n-5}\,(x-2)^n,\ \Sigma\,\frac{x^n}{3^{n+2}\cdot n^n}.$$

Sean r_1 y r_2 sus radios de convergencia respectivos.

$r_1=\lim\left[\left(\dfrac{n-2}{n-5}\right)\Big/\left(\dfrac{n-1}{n-4}\right)\right]=\lim\dfrac{(n-4)(n-2)}{(n-5)(n-1)}=1$, luego la serie converge en $(2-1, 2+1)=(1, 3)$.

En 1 y 3 tenemos sendas series numéricas cuyo término general no tiende a 0, por lo que divergen.

$$\frac{1}{r_2}=\lim\sqrt[n]{\frac{1}{3^{n+2}\cdot n^n}}=\lim\frac{1}{3^{(n+2)/n}\cdot n}=0,\ \text{luego } r_2=+\infty.$$

Ejercicio C/4-1. Sea $f(x)=\dfrac{x+7}{x+3}$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ utilizando solamente la definición de límite funcional.

Sea $\varepsilon>0$. Tenemos que encontrar un $\delta>0$ tal que $|x-1|<\delta$ implique $|f(x)-2|<\varepsilon$. Pero

$$|f(x)-2|=\left|\frac{x+7}{x+3}-2\right|=\left|\frac{x+7-2x-6}{x+3}\right|=\left|\frac{1-x}{x+3}\right|=\frac{|x-1|}{|x+3|}$$

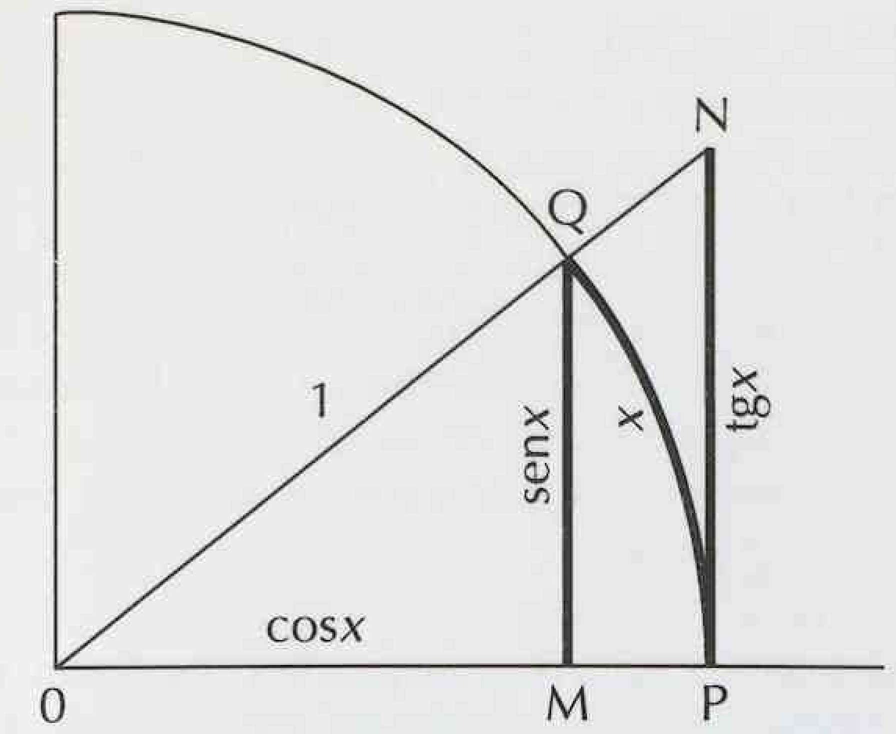
Si suponemos que $x>0$, será $|x+3|=x+3>3$, y en tal caso $\dfrac{|x-1|}{|x+3|}<\dfrac{|x-1|}{3}$. Si además $|x-1|<3\varepsilon$, entonces $\dfrac{|x-1|}{3}<\dfrac{3\varepsilon}{3}=\varepsilon$. Sea pues δ el menor de los números 1 y 3ε. Si $|x-1|<\delta$, se tendrá $|x-1|<1$ o sea $-1<x-1<1$ por lo que $0<x$. Como además $|x-1|<\delta\leq 3\varepsilon$ la cadena que hemos establecido nos lleva a $|f(x)-2|<\varepsilon$.

Ejercicio C/4-2. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$ (usando razonamientos geométricos a partir de la definición de sen$x$).

En C/2 se vio cómo se definían las funciones circulares de x mediante la circunferencia de radio 1. Vemos ahora que área triángulo MQO < área sector PQO < área triángulo PNO, es decir

$$\frac{1}{2}\cos x\cdot\operatorname{sen}x<\frac{1}{2}\,x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}.$$

Dividiendo por sen$x$ (que para x cercano a 0^+ es positivo) y multiplicando por 2, tenemos $\cos x<\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}<\dfrac{1}{\cos x}$. Como $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, los dos miembros extremos de la desigualdad tienden a 1, y necesariamente también el central, o sea $\lim\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}=1$, y su recíproco será $1/1=1$.



Ejercicio D/1-1. Consideremos las funciones

$$f(x)=\begin{cases}(x-5)\cdot\operatorname{sen}\dfrac{1}{x-5} & \text{si } x\neq 5\\ p & \text{si } x=5\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-5} & \text{si } x\neq 5\\ q & \text{si } x=5\end{cases}$$

Dígase si es posible dar valores a p y a q de manera que f y g sean continuas en todo **R**.

Salvo en $x=5$, f se obtiene por producto, composición y cociente de funciones continuas, luego sólo en este punto podría ser discontinua. Otro tanto sucede con g, por lo que se trata de ver si se pueden definir p y q de manera que

$$p=f(5)=\lim_{x\to 5}f(x),\ q=g(5)=\lim_{x\to 5}g(x)$$

Ahora bien, como $-1\leq \operatorname{sen}z\leq 1\quad\forall\, z\in\mathbf{R}$, tenemos $-(x-5)\leq(x-5)\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-5}\right)\leq(x-5)$. Al pasar a $\lim\limits_{x\to 5}$ los dos extremos de la cadena tienen límite 0, luego $\lim\limits_{x\to 5}f(x)=0$ y haremos $p=0$. En cambio, se tiene $\lim\limits_{x\to 5^-}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-5}=\operatorname{arctg}(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 5^+}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-5}=\operatorname{arctg}(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$, por lo que, cualquiera que sea el valor de q, g presenta en 5 una discontinuidad inevitable de primera especie.

Ejercicio D/2-1. Hallar $M=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}\right)^{1/(x-1)^2}$

Resolvamos primero, mediante descomposición, la indeterminación 0/0 de la base:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3\,x+2}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\,(x-2)}{(x-1)\,(x-5)}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}.\ \text{Por tanto } M=\left(\frac{1}{4}\right)^{+\infty}=0.$$

Ejercicio D/2-2. Sea $f(x)=\dfrac{x^5+7x^3-4x^2}{x^6-3x^3+2x^2}$. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Para hallar el primero dividiremos el numerador y el denominador por el término de menor grado que es x^2. Para el segundo, por el de mayor grado, que es x^6:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5+7x^3-4x^2}{x^6-3x^3+2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+7x-4}{x^4-3x+2}=-2,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+7x^3-4x^2}{x^6-3x^4+2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^3}-\dfrac{4}{x^4}}{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}=\frac{0}{1}=0$$

Ejercicio D/2-3. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x} = \ln \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x} =$$

$$= \ln \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{1/x} = \ln \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}\cdot\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1}{x}} = \ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{(1-x)x}} = \ln e^2 = 2.$$

Ejercicio D/2-4. Hallar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

Se trata de un límite indeterminado del tipo 0/0. Si $y = \sqrt[3]{x}$. es decir, $y^3 = x$, entonces $x \to 1$ equivale a $y^3 \to 1$ y esto a $y \to 1$. Luego

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2-2y+1}{(y^3-1)^2} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)^2}{[(y-1)(y^2+y+1)]^2} = \frac{1}{9}.$$

Ejercicio E/1-1. Demostrar, utilizando la definición de derivada, que la función $f(x) = x^3 + 2$ es derivable en el punto $x = 2$ y aprovechar el resultado para calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica dada por f en el punto de abscisa citada.

$$\text{Es } \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3+2-10}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8+12h+6h^2+h^3+2-10}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3+6h^2+12h}{h} = 12.$$

Consiguientemente f es derivable en $x = 2$ y es $f'(2) = 12$, lo que nos dice que la ecuación de la recta tangente pedida es $y - 10 = 12(x - 2)$.

Ejercicio E/1-2. Demostrar que la gráfica dada por la función $f(x) = |x - 2|$ carece de tangente en el punto $x = 2$.
En efecto, es $f(x) = x - 2$ si $x \geq 2$ y $f(x) = 2 - x$ si $x < 2$. Por tanto, será:

$$f'_+(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1, \text{ y}$$

$$f'_-(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1,$$

lo que indica que las tangentes por la derecha y por la izquierda a la gráfica dada por f en el punto de abscisa $x = 2$ sí existen, pero que son distintas, en otras palabras, f carece de tangente en dicho punto.

Ejercicio E/2-1. Hallar los puntos de la curva dada por $f(x) = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$ donde la tangente es paralela a la recta $y = 12x + 5$.
La pendiente de la recta dada es 12. Luego, buscamos puntos x tales que $f'(x) = 12$. Por tanto, resolvemos la ecuación $3x^2 + 18x - 9 = 12$, obteniendo como resultado $x = 1$ y $x = -7$, que corresponden a los puntos (1, 16) y (−7, 176).

Ejercicio E/5-1. Demostrar que si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$, entonces entre dos raíces consecutivas de f' en (a, b), existe a lo sumo una raíz de f.
En efecto, así es, ya que si c y d pertenecen a (a, b) y son tales que $f'(c) = f'(d) = 0$, siendo además raíces consecutivas de f', y entre ellas hubiera dos raíces p y q de f, es decir, si fuese $f(p) = f(q) = 0$ con $c < p < q < d$, por el teorema de Rolle existiría un valor t tal que $p < t < q$ con $f'(t) = 0$, contradiciéndose el hecho de ser c y d raíces consecutivas de f'.

Ejercicio E/5-2. Averiguar cuántas raíces tiene la ecuación $2x^3 - 9x^2 + 12x + 1 = 0$.
$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ es continua en todo **R** por ser polinómica. Su derivada $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$ tiene dos únicas raíces que son $x = 1$ y $x = 2$. Luego, en el intervalo (1, 2) hay a lo sumo una raíz de f. Como $f(1) = 6$ y $f(2) = 5$, si hubiese una raíz de f entre 1 y 2, la función en parte del intervalo (1, 2) sería creciente, cosa no posible pues $f'(x) < 0$ en todos los puntos de dicho intervalo. A partir de $x = 2$ la función es siempre creciente, pues es $f'(x) > 0$ para $x > 2$, con lo cual la ecuación no tiene ninguna raíz mayor que 2. La función es en $(-\infty, 1)$ creciente, por ser ahí su derivada positiva, con lo cual en $(-\infty, 1)$ hay a lo sumo una raíz, pero como todo polinomio de grado impar tiene cuando menos una raíz real, la ecuación dada tiene exactamente una raíz que se halla en $(-\infty, 1)$.

Ejercicio E/5-3. Comprobar si se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones $f(x) = \operatorname{sen}x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ y hallar el valor intermedio.
Las funciones seno y coseno son derivables y por tanto continuas en todo **R**.
Es $\cos(\pi/2) - \cos 0 = -1$, y $(\cos)'(x) = -\operatorname{sen}x$, una función que no se anula en ningún punto del intervalo $(0, \pi/2)$, por tanto, existe $t \in (0, \pi/2)$ tal que

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi/2)-\operatorname{sen}0}{\cos(\pi/2)-\cos 0} = \frac{1}{-1} = \frac{\operatorname{sen}'t}{\cos' t} = \frac{\cos t}{-\operatorname{sen} t},$$

de donde t debe cumplirse que $\operatorname{sen}t = \cos t$, lo que indica que es $t = \pi/4$.

Ejercicio E/5-4. Hallar dónde crece y decrece $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Es $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$, y por tanto el signo de f' es en todo punto distinto de +1 y de −1 igual al signo de $x^4 - 3x^2$. Al descomponerse dicho polinomio en la forma $x^2(x^2 - 3)$, queda claro que f' es en el intervalo $(-\infty, \sqrt{3})$ positiva, y por tanto f creciente en dicho intervalo, que f' es en el intervalo $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$ negativa, y por tanto f decreciente en dicho intervalo, excluyendo claro está los puntos +1 y −1, y por fin que f' es positiva en $(+\sqrt{3}, +\infty)$, y por tanto f creciente en dicho intervalo.

Ejercicio E/6-1. Se sustituye el lado superior de una ventana rectangular de perímetro 10 m por una semicircunferencia. Hallar las dimensiones que ha de tener la ventana para que la luz que deje entrar sea máxima.

Sea x el radio de la circunferencia y $2y$ la altura de la ventana. Será $y = \dfrac{5}{2} - x$. La luz que entrará será máxima cuando la función área $f(x) = 4xy + \dfrac{\pi x^2}{2} = 4x\left(\dfrac{5}{2} - x\right) + \dfrac{\pi x^2}{2}$ presente un máximo.

Es $f'(x) = 10 - 8x + \pi x$, lo que implica que $x = \dfrac{10}{8-\pi}$ es un punto crítico de f, y como $f''(x) = -8 + \pi$, en dicho punto hay un máximo.

Así pues, los lados de la ventana deberán medir $\dfrac{20}{8-\pi}$ y $\dfrac{20-5\pi}{8-\pi}$.

Ejercicio E/6-2. Dividir un alambre de 1 m de longitud en dos trozos, de modo que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo formados con ellos sea mínima.
Sean x y $1 - x$ las longitudes en metros de los dos trozos. El cuadrado de perímetro x tiene una superficie de $x^2/16$ m² y la circunferencia de perímetro $1 - x$ tiene una superficie de $(1 - x)^2/2\pi$ m². Luego buscamos para que la función $f(x) = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2\pi}\right) x^2 - \frac{1}{\pi} x + \frac{1}{2\pi}$ presente un mínimo.

Es $f'(x) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{\pi}\right) x - \frac{1}{\pi}$. Lo que nos indica que sólo $x = 8/(8 + \pi)$ es punto crítico de f.

Como es $f''(x) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{\pi}\right) > 0$, para dicho punto f presenta un mínimo.

Consiguientemente los dos trozos de alambre deben medir $\frac{8}{8+\pi}$ y $\frac{\pi}{8+\pi}$ m.

Ejercicio E/6-3. La suma de todas las aristas de un prisma recto de base cuadrada es 96 cm. Hallar las dimensiones del de volumen máximo y este volumen máximo.
Sean x e y las longitudes de las aristas distintas de dicho prisma. Deberá ser $8x + 4y = 96$, de donde, $y = 24 - 2x$.
El volumen de dicho prisma viene dado por $v(x) = x^2 \cdot y = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$. Por ser $V'(x) = 48x - 6x^2$, los puntos críticos de la función $V(x)$ son $x = 0$ y $x = 8$. Es obvio que la solución $x = 0$ no interesa (no hay prisma), y por otra parte, por ser $V''(x) = 48 - 12x$, es $V''(8) = -8$, lo que indica que el volumen máximo se alcanza cuando la arista de la base mide 8 cm. En este caso, por ser $y = 24 - 2x = 8$, se deduce que el prisma en cuestión es un cubo. Por tanto, el volumen del mismo valdrá $8^3 = 512$ cm³.

Ejercicio E/7-1. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$.
Se trata de una indeterminación del tipo 0/0. Aplicando [RH] tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio E/7-2. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^n - 1 - nx}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^n - 1 - nx}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{n(1 + x)^{n-1} - n}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{n(n - 1)\,(1 + x)^{n-2}}{2} = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Obsérvese que se ha aplicado la regla de L'Hôpital dos veces.

Ejercicio E/7-3. Calcular $\lim_{x\to +\infty} (e^x - x^2)$.
Se presenta indeterminación de tipo $\infty - \infty$. Sin embargo podemos escribir:

$$\lim_{x\to +\infty} (e^x - x^2) = \lim_{x\to +\infty} x^2 \cdot \left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right) = \lim_{x\to +\infty} x^2 \cdot \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right).$$

como

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty,$$

habiendo aplicado dos veces la regla de L'Hôpital, será $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty - 1 = +\infty$, por lo que el límite inicialmente buscado es $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.

Ejercicio E/7-4. Calcular $\lim_{x\to 0^+} x^x$.
Pongamos $\lim_{x\to 0^+} x^x = A$. Tomando logaritmos neperianos, obtenemos:

$$\ln A = \lim_{x\to 0^+} (\ln x^x) = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Por tanto, será $\ln A = 0$, o lo que es igual, $A = e^0 = 1$, es decir, el límite pedido vale 1.

Ejercicio E/7-5. Calcular $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x+1}$.
El límite propuesto presenta la indeterminación del tipo 1^∞. Tomando logaritmos se tendrá, llamando A al valor del límite pedido, que:

$$\ln A = \ln \left[\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x+1}\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\ln \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x+1}\right] = \lim_{x\to\infty} \left[(x + 1) \cdot \ln \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln \left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2-1}}{\frac{-1}{(x+1)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2(x^2 + 2x + 1)}{x^2 - 1} = -2.$$

Así, pues, el límite propuesto valdrá e^{-2}.

Ejercicio E/7-6. Calcular $\lim_{x\to +\infty} (e^{3x} + 5x)^{1/x}$.
Es un caso ∞^0. Llamando A al límite pedido y tomando logaritmos, se tiene:

$$\ln A = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln (e^{3x} + 5x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3 \cdot e^{3x} + 5}{e^{3x} + 5x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{9e^{3x}}{3e^{3x} + 5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{27e^{3x}}{9e^{3x}} = 3,$$

de donde, el límite propuesto vale e^3.

Ejercicio E/7-7. Calcular $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln (\cos 3x)}{\ln (\cos 2x)}$.
Es

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln (\cos 3x)}{\ln (\cos 2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-3\,\mathrm{sen}\,3x)/(\cos 3x)}{(-2\,\mathrm{sen}\,2x)/(\cos 2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3 \cdot \mathrm{sen}\,3x \cdot \cos 2x}{2 \cdot \mathrm{sen}\,2x \cdot \cos 3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}\,3x}{\mathrm{sen}\,2x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{3 \cdot \cos 2x}{2 \cdot \cos 2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3 \cdot \cos 3x}{2 \cdot \cos 2x} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

Obsérvese que en el cuarto paso se ha utilizado el hecho de que el límite de un producto es el producto de los límites a fin de simplificar operaciones.

Ejercicio E/7-8. Calcular $\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Este límite presenta la indeterminación $0\cdot\infty$. Ahora bien, escribiéndolo de la forma

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{1}{1-x}},$$

presenta la indeterminación del tipo ∞/∞, pudiendo entonces aplicar la RH, obteniendo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot(1-x)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot(1-x)\cdot(-1)}{2\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Ejercicio E/7-9. Calcular $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}2x)^{1/2x}$.

El límite propuesto presenta la indeterminación 1^∞. Tomando logaritmos y llamando A a dicho límite, tendremos:

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{sen}2x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{1+\operatorname{sen}2x}=1,$$

de donde se deduce que el límite pedido vale e.

Ejercicio E/8-1. Demostrar que en $x=0$:

(*a*) $\operatorname{tg}x-x$ y $x^3/3$; (*b*) $x-\operatorname{sen}x$ y $x^3/6$; (*c*) $1-\cos x$ y $x^2/2$, son parejas de infinitésimos equivalentes.

(*a*) Es $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{\frac{x^3}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2x}{x^2\cdot\cos^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2x}=1,$

de donde, los infinitésimos $\operatorname{tg}x-x$ y $x^3/3$ son equivalentes en el origen.

(*b*) Es $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{\frac{x^3}{6}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1,$

lo que prueba que las parejas de infinitésimos dadas en (*b*) y en (*c*) son equivalentes.

Ejercicio E/8-2. Hallar el orden de contacto de las curvas $f(x)=6x^2-8x+3$ y $g(x)=x^4$ en el punto de abscisa $x=1$.

Es $f(1)=g(1)=1$. Luego, las curvas dadas por f y g se cortan en el punto $(1, 1)$.

Por otra parte, es $f'(1)=g'(1)=4$, $f''(1)=g''(1)=12$ y $0=f'''(1)\neq g'''(1)=24$, lo que pone de manifiesto que las gráficas dadas por f y por g presentan un contacto de orden 2 en el punto $(1, 1)$.

Ejercicio E/9-1. Demostrar que

$$\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}a+(\cos a)(x-a)-\frac{(\operatorname{sen}a)\cdot(x-a)^2}{2!}-\frac{(\cos\theta)\cdot(x-a)^3}{3!}$$

donde θ está entre a y x.

Utilizar este desarrollo para calcular sen 51° evaluando el error cometido.

Tomando $f(x)=\operatorname{sen}x$, es $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\operatorname{sen}x$ y $f'''(x)=-\cos x$, de donde, es $f(a)=\operatorname{sen}a$, $f'(a)=\cos a$, $f''(a)=-\operatorname{sen}a$ y $f'''(\theta)=-\cos\theta$.

Sustituyendo entonces en la fórmula de Taylor en el caso $n=2$, es decir: en

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{f''(a)\cdot(x-a)^2}{2!}+\frac{f'''(\theta)\cdot(x-a)^3}{3!}$$

donde θ está entre a y x, se obtiene el resultado deseado.

Entonces, si tomamos, $x=45\pi/180\simeq 45°$ y $a=51\pi/180\simeq 51°$, se tendrá que es $x-a=\pi/30$. Utilizando la fórmula en cuestión y recordando que es $\operatorname{sen}45°=\cos 45°=\sqrt{2}/2$, obtenemos:

$$\operatorname{sen}51°=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{30}\right)-\frac{(\sqrt{2}/2)\cdot(\pi/30)^2}{2!}-\frac{(\cos\theta)\cdot(\pi/30)^3}{3!}.$$

Si tomamos como sen 51° la suma de los tres primeros términos tendremos que sen 51° = 0,7775 y que el error cometido será

$$\left|\frac{-(\cos\theta)\cdot(\pi/30)^3}{3!}\right|<\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{30}\right)^3<0{,}0002,$$

es decir, menor que 2 diezmilésimas, con lo que al dar sen 51° = 0,7775 damos tres decimales exactos.

Ejercicio E/9-2. Demostrar que la catenaria $y=a\cdot\operatorname{ch}(x/a)$ para pequeños valores de x puede aproximarse por la parábola $y=a+(x^2/2a)$.

Desarrollaremos en serie de MacLaurin la función $f(x)=a\cdot\operatorname{ch}(x/a)$ hasta el término de segundo grado.

Es $f(x)=a\cdot\operatorname{ch}(x/a)$, $f'(x)=\operatorname{sh}(x/a)$, $f''(x)=(1/a)\cdot\operatorname{ch}(x/a)$ y $f'''(x)=(1/a^2)\cdot\operatorname{sh}(x/a)$, y por tanto, es $f(0)=a$, $f'(0)=0$ y $f''(0)=1/a$.

Así pues, es $f(x)=a+\frac{x^2}{2a}+\frac{f'''(\theta)}{3!}x^3$, donde θ está entre 0 y x.

Al ser $\left|\frac{f'''(\theta)}{3!}\cdot x^3\right|=\left|\frac{\frac{1}{a^2}\cdot\operatorname{Sh}\frac{\theta}{a}}{3!}\cdot x^3\right|=\frac{1}{6a^2}\cdot\left|\operatorname{Sh}\frac{\theta}{a}\right|\cdot|x|^3,$

el límite de dicha expresión cuando x tiende a 0 es 0. Luego, para valores x tales que $|x|\to 0$, es $f(x)\simeq a+\frac{x^2}{2a}$.

Ejercicio E/9-3. Obtener el desarrollo de MacLaurin de la función sh*x*.

Es $\text{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Consiguientemente se tendrá:

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\quad f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad f'''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \text{y en general } f^{n)}(x) = \frac{e^x + (-1)^{n+1} \cdot e^{-x}}{2}.$$

Por tanto, es $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 1$, ..., y $f^{n)}(t) = \dfrac{e^t + (-1)^{n+1} \cdot e^{-t}}{2}$.

Luego, el desarrollo pedido es

$$\text{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^t + (-1)^{n+1} \cdot e^{-t}}{2 \cdot n!} x^n$$

donde *t* es un punto intermedio entre 0 y *x*.

Ejercicio E/11-1. Hallar máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x) = (1/7) \cdot x^7 - x^6$.
Es $f'(x) = x^6 - 6x^5 = x^5(x - 6)$, de donde los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 6$.
Es $f''(x) = 6x^5 - 30x^4 = 6x^4(x - 5)$, de donde, $f''(0) = 0$ y $f''(6) = 6^5$, lo que nos dice que en $x = 6$ se presenta un mínimo.
Por otro lado, las soluciones de $f''(x) = 0$ son $x = 0$ y $x = 5$.
Es $f'''(x) = 30x^4 - 120x^3 = 30x^3(x - 4)$, lo que nos dice que $f'''(0) = 0$ y $f'''(5) \neq 0$, y que en consecuencia en $x = 5$ hay un punto de inflexión.
Es $f^{IV}(x) = 120x^3 - 360x^2$, $f^{V}(x) = 360x^2 - 720x$ y $f^{VI}(x) = 720x - 720$, de donde la primera derivada que no se anula en $x = 0$ es la de orden 6, y como $f^{VI}(0) = -720$, en $x = 0$ se presenta un máximo.
Así, pues, *f* presenta un mínimo en $x = 6$, un máximo en $x = 0$ y un punto de inflexión en $x = 5$.

Ejercicio E/12-1. Estudiar el comportamiento asintótico para $x \to \pm\infty$ de las funciones $f(x) = x + 2^x$, $g(x) = [\ln x]^2$, $h(x) = x + \text{sen}x$

Se tiene $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x + 2^x}{x} = +\infty$. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x + 2^x}{x} = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} [(x + 2^x) - x] = 0$

por lo que $x + 2^x$ carece de dirección asintótica para $x \to +\infty$, pero se aleja hiperbólicamente, según la asíntota $y = x$ para $x \to -\infty$.
Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty$, la curva $y = g(x)$ se aleja parabólicamente cuando $x \to +\infty$ en la dirección horizontal.
Al ser $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \text{sen}x}{x} = 1$, y no existir $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} [(x + \text{sen}x) - x]$, la curva se aleja en ambos sentidos según la dirección de $y = x$, pero no lo hace ni hiperbólica ni parabólicamente.

Ejercicio E/13-1. Estudiar y representar gráficamente la función

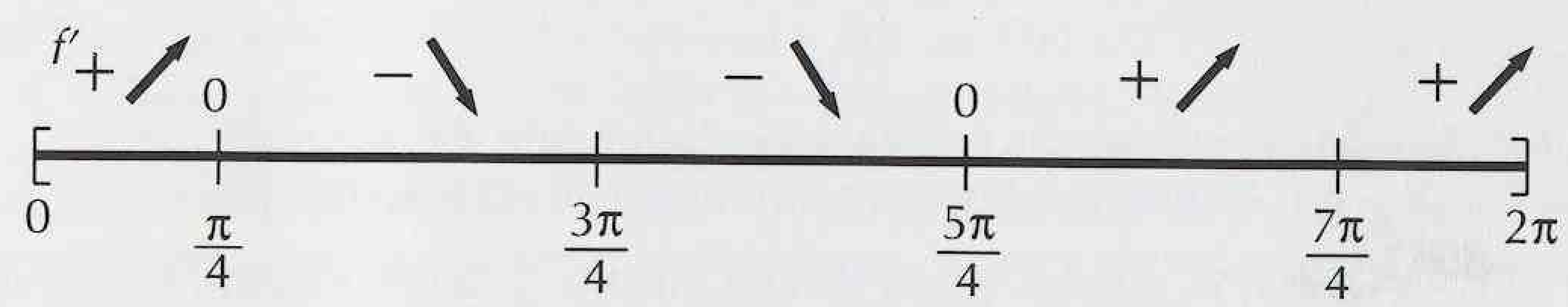
$$f(x) = \frac{\text{sen}x \cdot \cos x}{\text{sen}x + \cos x}.$$

Al ser $f(x) = f(x + 2\pi)$, *f* es periódica de período 2π y bastará, pues, con estudiarla en el intervalo $[0, 2\pi]$.
La función dejará de estar definida y de ser continua sólo en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, para los *x* tales que en $\text{sen}x + \cos x = 0$, o sea para $x = (3\pi)/4$ y $x = (7\pi)/4$. Así, pues, en general, *f* está definida y es continua en el conjunto $D = \mathbf{R} - \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right\}$.

Los puntos en los que corta a los ejes corresponden a las abscisas $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Pasemos a estudiar el crecimiento de *f*. Para ello:

$$f'(x) = \frac{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)(\text{sen}x + \cos x) - \text{sen}x \cdot \cos x(\cos x - \text{sen}x)}{(\text{sen}x + \cos x)^2} = \frac{\cos^3 x - \text{sen}^3 x}{(\text{sen}x + \cos x)^2}$$

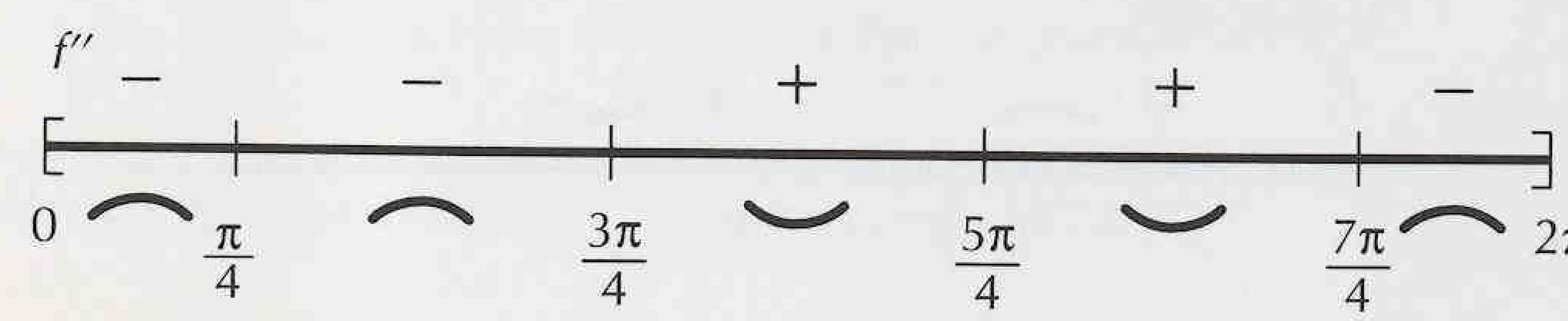
lo que nos dice que los puntos críticos corresponden a los *x* tales que $\cos x = \text{sen}x$, es decir, son $x = \pi/4$, y $x = 5\pi/4$. Mejor aún, el signo de f' en el intervalo $[0, 2\pi]$ viene dado según indica el siguiente esquema:



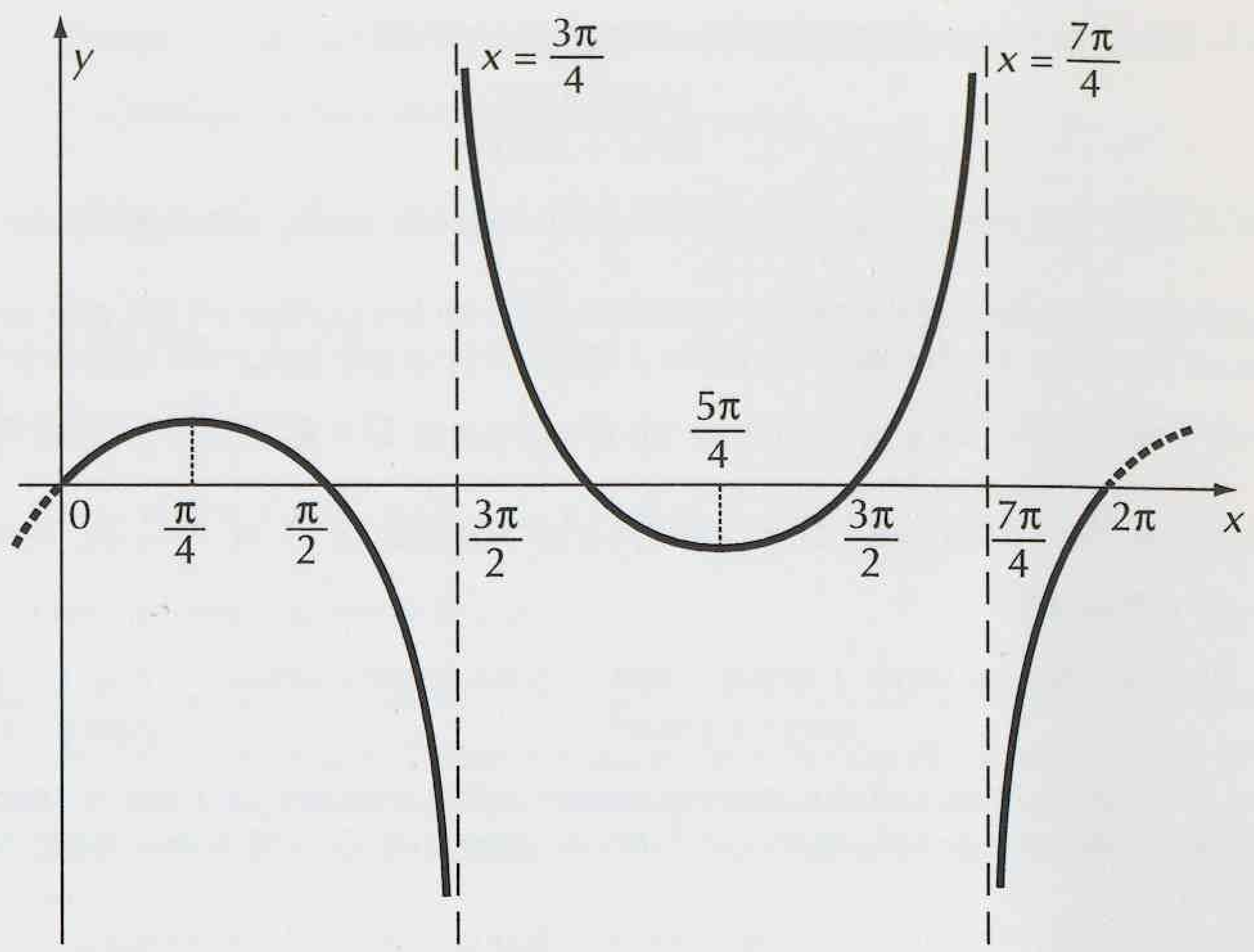
lo que, aparte de indicar el comportamiento de *f* en cuanto a crecimiento y decrecimiento, indica que en $x = \pi/4$ se presenta un máximo y que en $x = 5\pi/4$ se presenta un mínimo.
Pasemos a estudiar la derivada segunda. Es:

$$f''(x) = \frac{-3\cos x\, \text{sen}x\,(\text{sen}x + \cos x)^3 - 2(\cos^3 x - \text{sen}^3 x)(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}{(\text{sen}x + \cos x)^4}$$

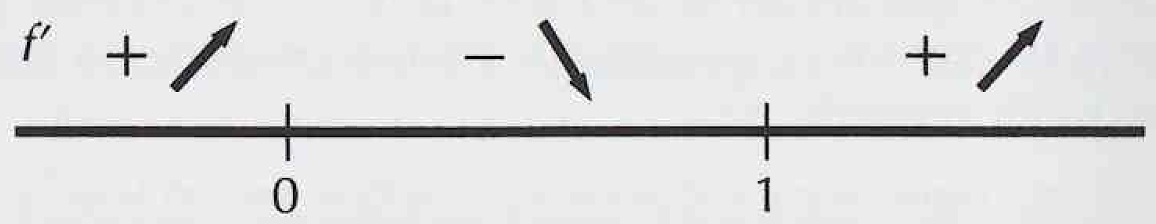
quedando el signo de la misma descrito en el esquema:



lo que indica que *f* es cóncava hacia $y < 0$ en $[0, 3\pi/4)$, cóncava hacia $y > 0$ en $(3\pi/4, 7\pi/4)$ y cóncava hacia $y < 0$ en $(7\pi/4, 2\pi]$. Nótese que los puntos $x = 3\pi/4$ y $x = 7\pi/4$ no son de inflexión ya que no pertenecen al dominio de *f*.
Por fin, indiquemos que las rectas $x = 3\pi/4$ y $x = 7\pi/4$ son asíntotas verticales, como el lector comprobará fácilmente.
Así las cosas, la gráfica de *f* será:



Ejercicio E/13-2. Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = x \cdot e^{1/x}$.
El dominio de f es $\mathbf{R} - \{0\}$. La función f no es par ni impar ni corta a los ejes.
Es $f'(x) = e^{1/x} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$, con lo que las zonas de crecimiento y decrecimiento vienen dadas por



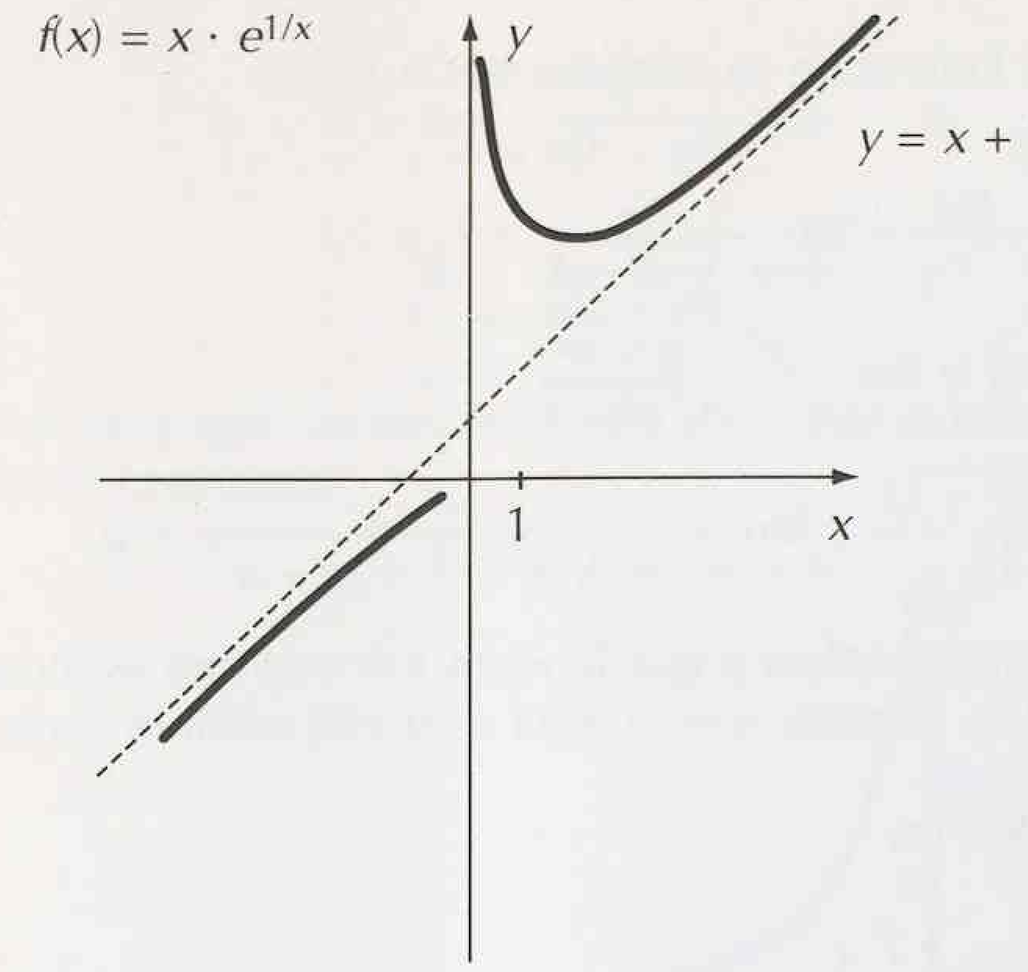
lo que en particular nos dice que en $x = 1$ hay un mínimo.
Es $f''(x) = (1/x^3) \cdot e^{1/x}$, con lo cual las concavidades de f son como se indica

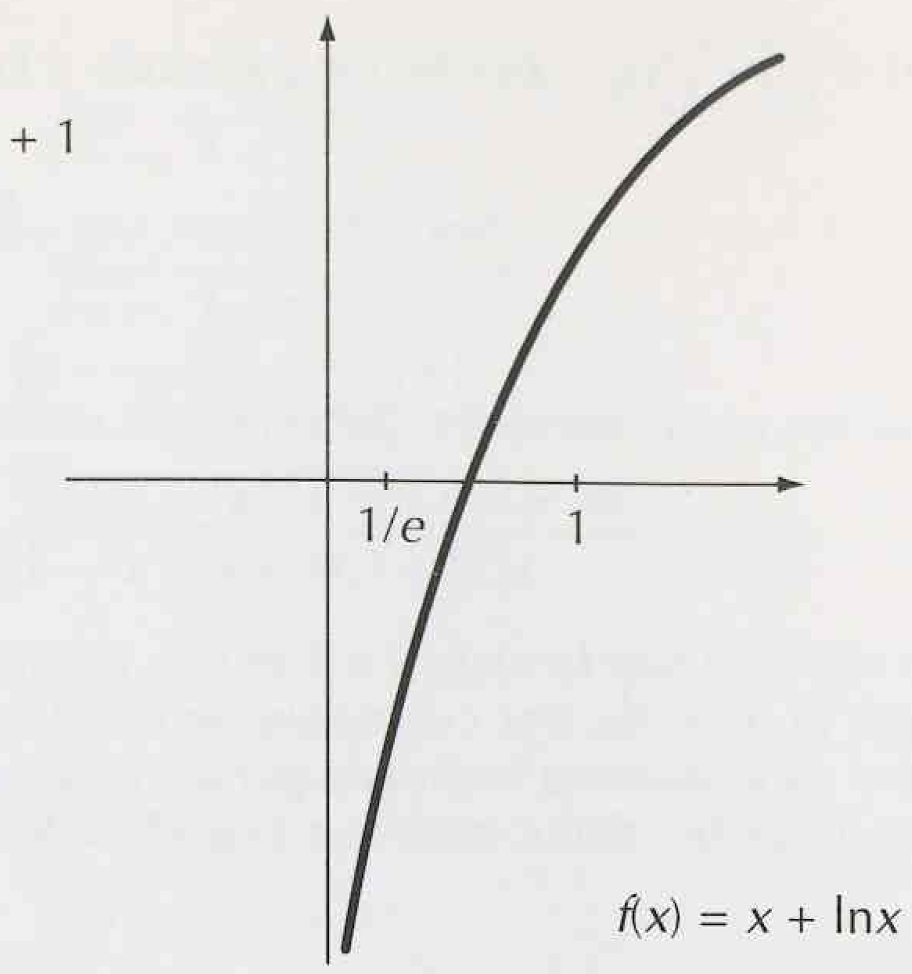
Es $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, lo que implica que $x = 0$ es una asíntota vertical.
Por otro lado es $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x \cdot e^{1/x} = \lim_{x \to 0^+} -x \cdot e^{-1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{e^{1/x}} = 0$,
lo que unido al hecho de ser $f(x) < 0$, para todo $x \in \mathbf{R}^-$ nos da el comportamiento de f en un entorno del origen.
Además, es

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = 1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ y}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 1,$$

lo que implica que $y = x + 1$ es asíntota oblicua por ambos lados.
La gráfica de f es:





Ejercicio E/13-3. Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = x + \ln x$.
Está claro que $\mathbf{R}^+$ es el dominio de f. Por otra parte, por ser $f'(x) = 1 + (1/x)$, es f' positiva en todo el dominio de f, lo que indica que f es estrictamente creciente, lo que unido al hecho de ser $f(1/e) = (1/e) - 1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$, nos dice, haciendo uso del teorema de Bolzano, que la gráfica de f corta exactamente al eje de abscisas en un punto que está comprendido entre $1/e$ y 1. A consecuencia de ser f estrictamente creciente es obvio que f carece de máximos y mínimos.
Por otro lado, es $f''(x) = -1/x^2$, es decir, es $f''(x) < 0$, para todo x de $\mathbf{R}^+$, lo que nos dice que f es cóncava hacia $y < 0$ en todo su dominio.
Comprobemos ahora el comportamiento asintótico de f. Es:

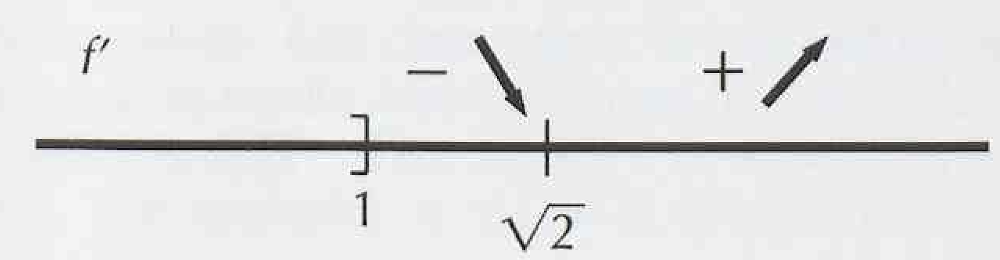
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + \ln x) = \lim_{x \to 0^+} x + \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty,$$

lo que indica que la recta $x = 0$ es asíntota vertical.
Por otra parte es:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1, \text{ y } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x + \ln x) = +\infty,$$

lo que nos dice que f carece de asíntotas horizontales e inclinadas, pero que se aleja de forma parabólica en dirección horizontal cuando x tiende hacia más infinito.

Ejercicio E/13-4. Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
Es f de dominio $\mathbf{R} - [-1, +1]$. En dicho dominio f es continua y derivable. Además f es una función par, es decir, su gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas. Por tanto, estudiaremos la función para valores mayores que 1.
Es $f'(x) = \frac{x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^{3/2}}$, luego, si $x > 1$, el signo de f' es igual al signo de $x^3 - 2x$, y por tanto al de $x(x^2 - 2)$, lo que nos dice que el crecimiento de f viene dado según el esquema:



es decir, estrictamente decreciente en el intervalo $(1, \sqrt{2})$, estrictamente creciente en el intervalo $(\sqrt{2}, +\infty)$, y con un mínimo en el punto $x = \sqrt{2}$.

Es $f''(x) = \dfrac{x^2+2}{(x^2-1)^{5/2}}$, por lo que para todo x la función es cóncava hacia $y > 0$.

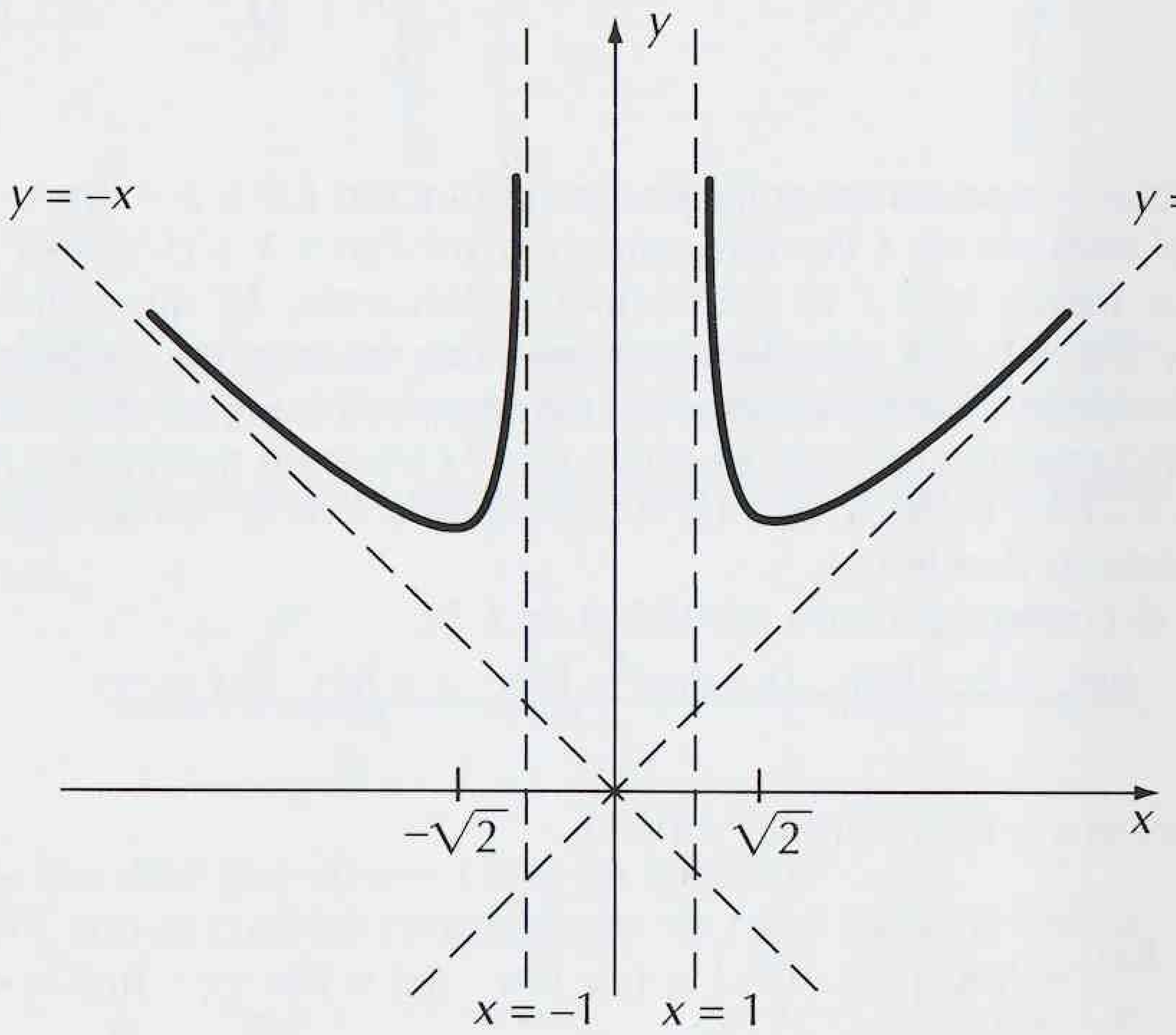
Es

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 1, \text{ y}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2 - x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1} + x^3 - x} = 0,$$

lo que nos dice que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical y que la recta $y = x$ es una asíntota inclinada por la derecha. Por cuestiones de simetría, la recta $x = -1$ será a su vez asíntota vertical y la recta $y = -x$ es asíntota inclinada por la izquierda.
De todo lo dicho, deducimos que la gráfica de f es:



Ejercicio E/13-5. Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{1}{1-e^x}$.

El dominio de f es $\mathbf{R} - \{0\}$; en dicho dominio f es continua y derivable.

Es $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$, y por tanto, f es estrictamente creciente en todo su dominio, careciendo de máximos y mínimos.

Es $f''(x) = \dfrac{1+e^{2x}}{(1-e^x)^3}$, y por tanto, el signo de f'' es el signo de $1 - e^x$, es decir, negativo en $\mathbf{R}^+$ y positivo en $\mathbf{R}^-$, luego f es cóncava hacia $y > 0$ en $\mathbf{R}^-$ y hacia $y < 0$ en $\mathbf{R}^+$.

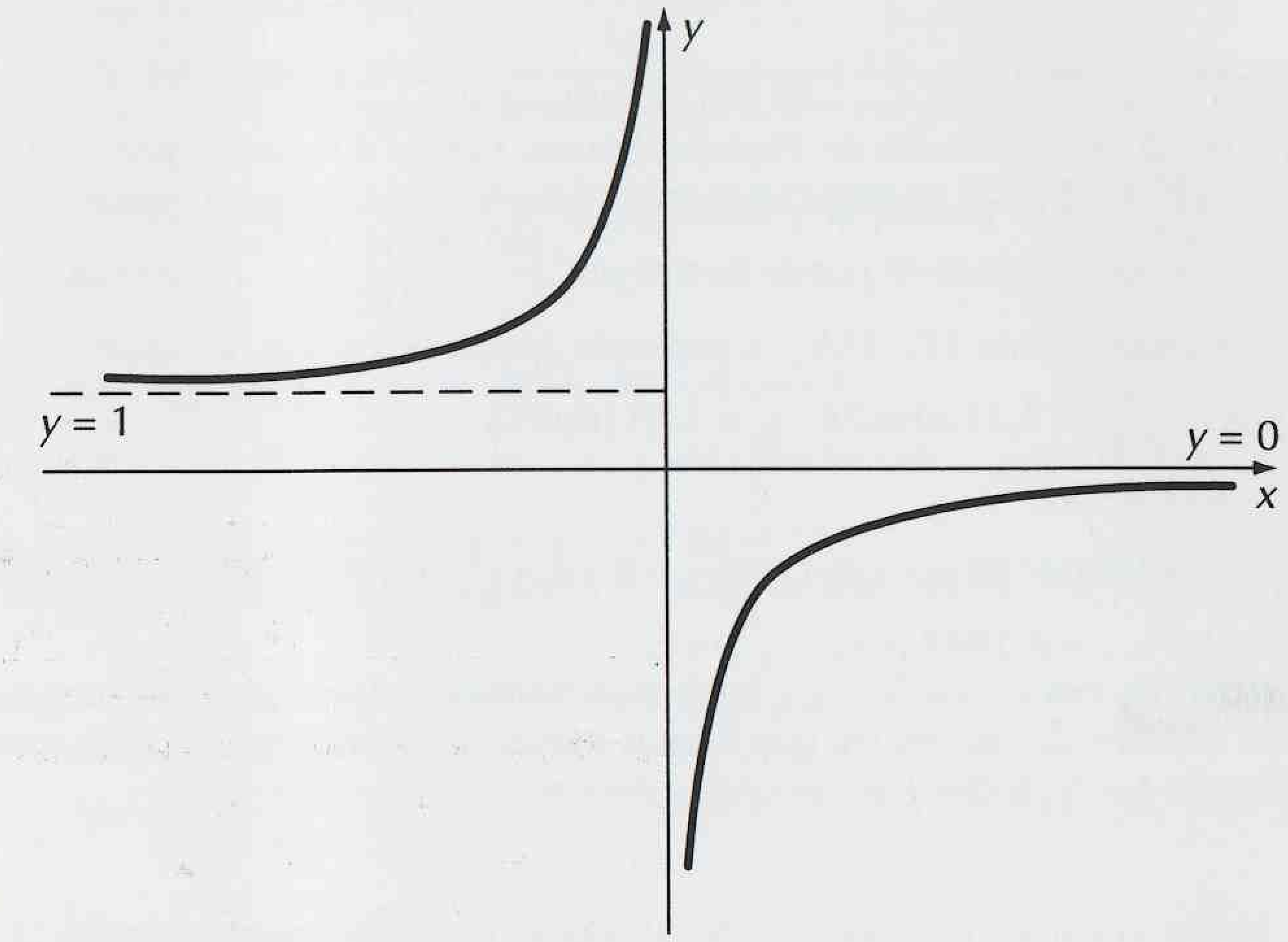
Es $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1-e^x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1-e^x} = -\infty$, lo que nos dice que $x = 0$ es asíntota vertical.

Es

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(1-e^x)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-e^x} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x(1-e^x)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-e^x} = 1,$$

lo que nos dice que las rectas $y = 0$ e $y = 1$ son asíntotas horizontales, respectivamente por la derecha y por la izquierda.



Ejercicio E/15-1. Resolver aproximadamente la ecuación $x^5 - 12x^4 + 28x^3 + 45x^2 - 160x + 55 = 0$.
Sea $f(x) = x^5 - 12x^4 + 28x^3 + 45x^2 - 160x + 55$. Antes de tener que acudir a una representación gráfica de la función, hacemos un estudio de los valores de f en algunos enteros, para ver de aislar las soluciones. El resultado es

$$f(-5) < 0,\ f(-4) < 0,\ f(-3) < 0,\ f(-2) > 0,\ f(-1) > 0,\ f(0) > 0,\ f(1) < 0,\ f(2) < 0,\ f(3) > 0,\ f(4) < 0,$$
$$f(5) < 0,\ f(6) < 0,\ f(7) < 0,\ f(8) < 0,\ f(9) > 0,$$

con lo que hemos ubicado una solución en cada uno de los intervalos $(-3, -2)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ y $(8, 9)$. Procediendo análogamente para la derivada $f'(x) = 5x^4 - 48x^3 + 84x^2 + 90x - 160$, tenemos

$$f'(-5) > 0,\ f'(-4) > 0,\ f'(-3) > 0,\ f'(-2) > 0,\ f'(-1) < 0,\ f'(0) < 0,\ f'(1) < 0,\ f'(2) > 0,\ f'(3) < 0,\ f'(4) < 0,$$
$$f'(5) < 0,\ f'(6) < 0,\ f'(7) > 0$$

y f' tiene sus raíces en $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(6, 7)$.
De los intervalos en que tenemos separadas las raíces de f sólo en $(2, 3)$ presenta f' un punto de anulación. Vamos a proceder en él mediante el Teorema de Bolzano. Tomaremos como primera aproximación el punto medio del intervalo, a continuación el de la mitad de intervalo en que f tenga cambio de signo, y así sucesivamente. Está claro que si la raíz está entre a y b, y se toma la aproximación $(a + b)/2$, el error máximo es medio intervalo, o sea, $(b - a)/2$. Tendremos $x_1 = (2 + 3)/2 = 2{,}5$. Como $f(2{,}5) > 0$, $x_2 = (2 + 2{,}5)/2 = 2{,}25$. Al ser $f(2{,}25) < 0$, $x_3 = (2{,}25 + 2{,}5)/2 = 2{,}375$. Reiterando el procedimiento, llegamos, por ejemplo, a $x_{26} = 2{,}42988516$, siendo el error acotable por $(3 - 2)/2^{26} \simeq 0{,}000000015$.

En $(-3, -2)$ f' y f'' no se anulan (f'' tiene una raíz en $(-1, 0)$, una en $(2, 3)$ y una en $(5, 6)$). Como $f(-3) \cdot f''(-3) > 0$, podemos usar el Método de Newton con $x_0 = -3$. Ahora es $x_1 = -3 - \dfrac{f(-3)}{f'(-3)} = -2{,}49136655$

$x_2 = -2{,}49136655 - \dfrac{f(2{,}49136655)}{f'(2{,}49136655)} = -2{,}36391534$ y así sucesivamente hasta, por ejemplo, $x_6 = 2{,}1910834$. Como f' es positiva y decreciente en $[-3, -2]$, toma el valor mínimo en -2, $f'(-2) = 460$, pudiéndose acotar el error por $\left|\dfrac{f(-2{,}36391534)}{460}\right| \simeq 0{,}00000000045$.

En $(0, 1)$ aplicaremos el Método de las cuerdas. Será $x_1 = 0 - \dfrac{f(0)}{f(1) - f(0)} = 0{,}56122449$.

Como $f(0{,}56122449) < 0$, será $x_2 = 0 - \dfrac{f(0)}{f(0{,}56122449) - f(0)} = 0{,}429863159$. Como $f(x_2) < 0$, el proceso se repite en $[0, x_2]$, intervalo en cuyos extremos f tiene diferente signo. Así llegamos, por ejemplo, a $x_{10} = 0{,}397317547$. f' es negativa y creciente en $[0, 1]$, luego su valor mínimo en $[0, 1]$ es $f'(0) = -160$, con lo que el error se puede acotar por $\left|\dfrac{f(0{,}397317547)}{-160}\right| \simeq 0{,}000000024$.

En $(3, 4)$ f' y f'' no se anulan; como $f(4) \cdot f''(4) > 0$ podemos aplicar el Método de Newton simplificado con $x_0 = 4$. Será $x_1 = 4 - \dfrac{f(4)}{f'(4)} = 3{,}51209678$, $x_2 = 3{,}51209678 - \dfrac{f(3{,}51209678)}{f'(4)} = 3{,}38994267$ etc. Por ejemplo, $x_{70} = 3{,}17514383$.

En $(8, 9)$ aplicaremos el Método de iteración con $x_0 = 8$ y $k = \dfrac{1}{f'(8)}$ siendo $x_1 = 8 - k \cdot f(8)$, $x_2 = x_1 - k \cdot f(x_1)$ etcétera. Por ejemplo, $x_{17} = 8{,}18873692$.

El carácter reiterativo de estos métodos los hace especialmente aptos para ser programados (y, de hecho, el elevado número de decimales que hemos puesto se debe a que ha sido una calculadora programable quien ha hecho todos los cálculos anteriores).

Ejercicio F/1-1. Hallar el valor medio de la función $f(x) = (x^2 - 1)/x^2$ en el intervalo $[1, 4]$.

Es $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^2} \cdot dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int dx - \int x^{-2} \cdot dx = x + \frac{1}{x} + C$, y por tanto, $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^2 - 1}{x^2} \cdot dx = \left[x + \frac{1}{x}\right]_1^4 = \frac{9}{4}$.

Luego, si λ es el valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[1, 4]$, entonces debe ser $\lambda \cdot (4 - 1) = 9/4$, es decir, es $\lambda = 3/4$.

Ejercicio F/3-1. Resolver por sustitución las siguientes integrales:

(*a*) $\int x(x + 1)^{17} \cdot dx$; (*b*) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \cdot dx$; (*c*) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \cdot dx$.

(*a*) Haciendo el cambio $x + 1 = t$, la integral dada se convierte en $\int (t - 1) \cdot t^{17} \cdot dt = \int (t^{18} - t^{17}) \cdot dt = \dfrac{t^{19}}{19} - \dfrac{t^{18}}{18} + C = \dfrac{(x + 1)^{19}}{19} - \dfrac{(x + 1)^{18}}{18} + C$.

(*b*) Hacemos $x = t^2$. En este caso es $dx = 2t \cdot dt$, y la integral será $2\displaystyle\int \frac{t^2}{t - 2} \cdot dt$ que con $t - 2 = z$ pasa a ser $2\displaystyle\int \frac{(z + 2)^2}{z} \cdot dz = 2\int \frac{z^2 + 4z + 4}{z} \cdot dz = 2\int \left(z + 4 + \frac{4}{z}\right) \cdot dz = 2\left(\frac{z^2}{2} + 4z + 4 \cdot \ln z\right) + C =$ $= z^2 + 8z + 8 \cdot \ln z + C$, lo que, deshaciendo los cambios realizados, nos lleva a que la integral pedida vale $(\sqrt{x} - 2)^2 + 8(\sqrt{x} - 2) + 8\ln(\sqrt{x} - 2) + C$.

(*c*) Hacemos el cambio $e^x = t$, o lo que es igual, $x = \ln t$, con lo que es $dx = (1/t) \cdot dt$, y la integral dada se convierte en $\displaystyle\int \frac{t}{(t + 1)^2} \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = \int \frac{1}{(t + 1)^2} \cdot dt$.

Haciendo ahora $z = t + 1$, la integral se convierte en $\displaystyle\int \frac{1}{z^2} \cdot dz = \int z^{-2} \cdot dz = -\frac{1}{z} + C$, lo que deshaciendo los cambios realizados nos dice que la integral pedida vale $-\dfrac{1}{e^x + 1} + C$.

Ejercicio F/4-1. Resolver por partes las siguientes integrales:

(*a*) $\int x \cdot \mathrm{arctg}x \cdot dx$; (*b*) $\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx$; (*c*) $\int e^{2x} \cdot \cos 3x \cdot dx$.

(*a*) Sea $g'(x) = x$ y $f(x) = \mathrm{arctg}x$. Será $g(x) = x^2/2$ y $f'(x) = 1/(1 + x^2)$.
Por tanto, la integral $\int x \cdot \mathrm{arctg}x \cdot dx$, según la fórmula de integración por partes valdrá

$$\frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2 + 1} \cdot dx.$$

Al ser $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 + 1} \cdot dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} \cdot dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} \cdot dx = x - \mathrm{arctg}x$, se tiene que $\displaystyle\int x \cdot \mathrm{arctg}x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}[x - \mathrm{arctg}x] + C$.

(*b*) Llamemos I a la integral propuesta. Si tomamos $f(x) = x^2$ y $g'(x) = \cos x$, será $f'(x) = 2x$ y $g(x) = \mathrm{sen}x$. Con ello tendremos:

$$I = \int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = x^2 \cdot \mathrm{sen}x - 2\int x \cdot \mathrm{sen}x \cdot dx.$$

Pasamos a resolver esta segunda integral. Tomamos ahora $u(x) = x$ y $v'(x) = \mathrm{sen}x$, con ello será $u'(x) = 1$ y $v(x) = -\cos x$, y por tanto tendremos

$$\int x \cdot \mathrm{sen}x \cdot dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot dx = -x \cdot \cos x + \mathrm{sen}x,$$

lo que nos lleva a

$$I = x^2 \cdot \mathrm{sen}x + 2x \cdot \cos x - 2 \cdot \mathrm{sen}x + C.$$

(*c*) Llamemos I a la integral propuesta. Si tomamos $f(x) = e^{2x}$ y $g'(x) = \cos 3x$, será $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$ y $g(x) = (1/3) \cdot \mathrm{sen}3x$, y por tanto:

$$I = \int e^{2x} \cdot \cos 3x \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot e^{2x} \cdot \mathrm{sen}3x - \frac{2}{3}\int e^{2x} \cdot \mathrm{sen}3x \cdot dx.$$

Repetimos el proceso para esta segunda integral, tomando $f(x) = e^{2x}$ y $g'(x) = \text{sen}3x$, con lo que es $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$ y $g(x) = (-1/3) \cdot \cos 3x$, y por tanto:

$$\int e^{2x} \cdot \text{sen}3x \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cdot \cos 3x \cdot dx,$$

lo que nos conduce a

$$I = \frac{1}{3} \cdot e^{2x} \cdot \text{sen}3x - \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3} \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} \cdot I\right],$$

es decir, a

$$I = \frac{1}{3} \cdot e^{2x} \cdot \text{sen}3x + \frac{2}{9} \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x - \frac{4}{9} \cdot I,$$

de donde, despejando I se obtiene:

$$I = \frac{9}{13}\left[\frac{1}{3} \cdot e^{2x} \cdot \text{sen}3x + \frac{2}{9} \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x\right], \text{ salvo una constante aditiva.}$$

Ejercicio F/5-1. Calcular $\int \frac{3x^2 - 2x + 2}{x^3 - 3x + 2} \cdot dx$

Descomponiendo el denominador por Ruffini se llega a que dicho denominador vale $(x - 1)^2 \cdot (x + 2)$, lo que indica que la fracción que pretendemos integrar se descompone en una suma del tipo

$$\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

Para que así sea, los polinomios $3x^2 - 2x + 2$ y $A(x + 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)^2$ deben ser iguales. Dando a x el valor 1 se ve que necesariamente es $A = 1$, dando a x el valor -2, necesariamente es $C = 2$ y al igualar los coeficientes de segundo grado de ambos polinomios se obtiene $B = 1$. Así pues, es:

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 2}{x^3 - 3x + 2} \cdot dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx + \int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{2}{x+2}\, dx,$$

con lo que tendremos:

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 2}{x^3 - 3x + 2} \cdot dx = -\frac{1}{x-1} + \ln|x-1| + 2 \cdot \ln|x+2| + C.$$

Ejercicio F/6-1. Resolver $W = \int \frac{5x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 13x + 17}{x^5 + 3x^4 + 7x^3 + 13x^2 + 12x + 4} \cdot dx$

El denominador descompuesto es $(x + 1)^3 \cdot (x^2 + 4)$. Por tanto, la fracción que integramos se descompone en una suma de tipo

$$\frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4},$$

cuya suma es

$$\frac{A(x^2+4) + B(x+1)(x^2+4) + C(x+1)^2 \cdot (x^2+4) + (Dx+E)(x+1)^3}{(x+1)^3 \cdot (x^2+4)}.$$

Al ser iguales los denominadores, necesariamente deben ser iguales los numeradores, es decir:

$$5x^4 + 7x + 3x^2 + 13x + 17 = A(x^2+4) + B(x+1)(x^2+4) + C(x+1)^2(x^2+4) + \\ + (Dx+E)(x+1)^3,$$

o lo que es igual

$$5x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 13x + 17 = (C + D)x^4 + (B + 2C + 3D + E)x^3 + \\ + (A + B + 5C + 3D + 3E)x^2 + (4B + 8C + D + 3E)x + (4A + 4B + 4C + E),$$

lo que nos conduce al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} C + D \quad &= 5 \\ B + 2C + 3D + E &= 7 \\ A + B + 5C + 3D + 3E &= 13 \\ 4A + 4B + 4C + E &= 17. \end{aligned}$$

Con un poco de paciencia se resuelve el sistema llegando a la solución, que resulta ser:

$$A = 1,\ B = 2,\ C = 3,\ D = 2 \text{ y } E = -7.$$

Consiguientemente, se tendrá:

$$W = \int \frac{1}{(x+1)^3}\, dx + \int \frac{2}{(x+1)^2}\, dx + \int \frac{3}{x+1}\, dx + \int \frac{2x-7}{x^2+4}\, dx,$$

de donde, la integral I buscada vale

$$I = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} + 3 \cdot \ln(x+1) + \ln(x^2+4) - \frac{7}{2} \cdot \text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Ejercicio F/6-2. Demuéstrese la fórmula dada en F/6 (caso III) para $\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2} dx$.

Descompondremos la integral en dos inmediatas, una de tipo logarítmico, y otra de tipo arcotangente:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}\, dx = M \int \frac{x}{(x-a)^2+b^2}\, dx + N \int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\, dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x-2a+2a}{(x-a)^2+b^2}\, dx +$$

$$+ N \int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{M}{2} \int \frac{2x-2a}{(x-a)^2+b^2}\, dx + (Ma+N) \int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\, dx =$$

$$= \frac{M}{2} \ln[(x-a)^2+b^2] + \frac{Ma+N}{b} \int \frac{\frac{1}{b}}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}\, dx =$$

$$= \frac{M}{2} \ln[(x-a)^2+b^2] + \frac{Ma+N}{b} \text{arctg} \frac{x-a}{b} + C.$$

Ejercicio F/6-3. Resolver $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 + 4x + 7}{(x^2 - 4x + 7)^2}\, dx$.

El polinomio $x^2 - 4x + 7$ es indescomponible en **R**, pudiéndose escribir de la forma $\left[(x-2)^2 + (\sqrt{3})^2\right]$.
Utilizaremos ahora el Método de Hermitte:

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4x + 7}{(x^2 - 4x + 7)^2} = \left[\frac{ax + b}{x^2 - 4x + 7}\right]' + \frac{mx + n}{x^2 - 4x + 7}$$

de donde obtenemos

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4x + 7}{(x^2 - 4x + 7)^2} = \frac{(x^2 - 4x + 7) \cdot a - (ax + b)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 7)^2} + \frac{mx + n}{x^2 - 4x + 7} =$$

$$= \frac{mx^3 + (-a - 4m + n)x^2 + (-2b + 7m - 4n)x + (7a + 4b + 7n)}{(x^2 - 4x + 7)^2}$$

lo que nos conduce al sistema

$$m = 1, \quad -a - 4m + n = -3, \quad -2b + 7m - 4n = 4, \quad 7a + 4b + 7n = 7$$

cuya solución es $m = 1$, $n = 4/3$, $a = 1/3$, $b = -7/3$.
Así pues

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4x + 7}{(x^2 - 4x + 7)^2} = \left[\frac{(1/3)x - (7/3)}{x^2 - 4x + 7}\right]' + \frac{x + (4/3)}{x^2 - 4x + 7},$$

$$\int \frac{x^3 - 3x + 4x + 7}{(x^2 - 4x + 7)^2}\, dx = \frac{(1/3)x - (7/3)}{x^2 - 4x + 7} + \int \frac{x + (4/3)}{x^2 - 4x + 7}\, dx =$$

$$= \frac{(1/3)x - (7/3)}{x^2 - 4x + 7} + \frac{1}{2} \ln (x^2 - 4x + 7) + \frac{10}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x - 2}{\sqrt{3}} + C.$$

Ejercicio F/6-4. Resolver la integral $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^4 + 1}\, dx$.

Para descomponer el denominador $x^4 + 1$ es necesario hallar las raíces de este polinomio que son las raíces cuartas de -1, es decir, tomando complejos, las raíces cuartas de 1_{180° que son 1_{45°, 1_{135°, 1_{225° y 1_{315°, o bien, escritas en forma binómica

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i, \; -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i, \; -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i, \; \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i,$$

lo que nos dice que

$$x^4 + 1 = \left[\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] \left[\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] = \left(x^2 - \sqrt{2}\, x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\, x + 1\right).$$

Esta descomposición del polinomio $x^4 + 1$ nos permitirá escribir

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{\left[\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]} + \frac{Cx + D}{\left[\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]}$$

para ciertos números reales A, B, C y D que deben de cumplir que:

$$1 = (Ax + B)\left(x^2 + \sqrt{2}\, x + 1\right) + (Cx + D)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right),$$

o lo que es igual, que

$$1 = (A + C)x^3 + (\sqrt{2}\, A + B - \sqrt{2}\, C + D)x^2 + (A + \sqrt{2}\, B + C - \sqrt{2}\, D)x + (B + D),$$

lo que nos conduce al sistema

$$\begin{aligned} A + \quad\quad + C \quad\quad &= 0 \\ \sqrt{2}\, A + B - \sqrt{2}\, C + D &= 0 \\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}\, D &= 0 \\ B + \quad\quad + D &= 1, \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$A = \frac{-1}{2\sqrt{2}}, \; B = \frac{1}{2}, \; C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ y } D = \frac{1}{2}.$$

Luego, será:

$$I = \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}\, dx + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}\, dx.$$

Así, pues, resulta ser

$$I = \int \frac{1}{x^4 + 1} \cdot dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(x^2 - \sqrt{2}\, x + 1\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\, x - 1\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(x^2 - \sqrt{2}\, x + 1\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\, x + 1\right) + C.$$

Ejercicio F/7-1. Calcular $\int \operatorname{sen}4x \cdot \cos 2x \cdot dx$.

La expresión $\operatorname{sen}4x \cdot \cos 2x$ se puede escribir del modo $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}6x + \operatorname{sen}2x)$. Por tanto, será

$$\int \operatorname{sen}4x \cdot \cos 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \operatorname{sen}6x \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int \operatorname{sen}2x \cdot dx = -\frac{1}{12} \cdot \cos 6x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Ejercicio F/7-2. Resolver la integral $I = \int \frac{1 + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot dx$.

Haciendo el cambio $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ será:

$$I = \int \frac{1 + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot dx = \int \frac{1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}}{1 + \frac{2t}{1 + t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2} \cdot dt = 4 \int \frac{1}{(t + 1)^2 \cdot (t^2 + 1)} \cdot dt.$$

La fracción $\frac{1}{(t + 1)^2 \cdot (t^2 + 1)}$ se descompone en suma de fracciones de la forma

$$\frac{A}{(t + 1)^2} + \frac{B}{t + 1} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1}.$$

donde $1 = A(t^2 + 1) + B(t + 1)(t^2 + 1) + (Ct + D)(t^2 + 2t + 1)$, lo que nos dice que $A = 1/2$, $B = 1/2$, $C = -1/2$ y $D = 0$, de donde:

$$I = 4 \cdot \left[\frac{1}{2} \int \frac{1}{(t + 1)^2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t + 1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{t}{t^2 + 1} dt\right] =$$

$$= 4 \cdot \left[- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{2} \cdot \ln (t + 1) - \frac{1}{4} \cdot \ln (t^2 + 1) + C\right] =$$

$$= \frac{-2}{t + 1} + 2 \cdot \ln (t + 1) - \ln (t^2 + 1) + C =$$

$$= \frac{-2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + 2 \cdot \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right) - \ln \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1\right) + C.$$

Ejercicio F/8-1. Calcular la integral: (*a*) $\operatorname{tg}^6 x \cdot dx$.

Es $\int \operatorname{tg}^6 x \cdot dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \operatorname{tg}^4 x \cdot dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \operatorname{tg}^4 x \cdot dx =$

$$= \int \operatorname{tg}^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx - \int \operatorname{tg}^4 x \cdot dx = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \operatorname{tg}^2 x \cdot dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \left[- \int \operatorname{tg}^2 x \cdot dx + \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx\right] = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \int \operatorname{tg}^2 x \cdot dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot dx = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x - x + C.$$

Ejercicio F/8-2. Resolver la integral $\int \frac{\cos^{11} x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot dx$.

$$\text{Es } \int \frac{\cos^{11} x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot dx = \int \frac{\cos^{10} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot dx = \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x)^5}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot d\operatorname{sen} x,$$

y por tanto, haciendo el cambio $\operatorname{sen} x = t$, la integral se convierte en

$$\int \frac{(1 - t^2)^5}{t^2} \cdot dt = \int \frac{1 - 5t^2 + 10t^4 - 10t^6 + 5t^8 - t^{10}}{t^2} \cdot dt =$$

$$= \int (t^{-2} - 5 + 10t^2 - 10t^4 + 5t^6 - t^8) \cdot dt = - \frac{1}{t} - 5t + \frac{10t^3}{3} + \frac{5t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + C,$$

lo que, deshaciendo el cambio, indica que la integral propuesta vale:

$$- \frac{1}{\operatorname{sen} x} - 5 \cdot \operatorname{sen} x + \frac{10 \operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{5 \operatorname{sen}^7 x}{7} - \frac{\operatorname{sen}^9 x}{9} + C.$$

Ejercicio F/8-3. Calcular $H = \int \operatorname{sen}^3 3x \cdot \cos^2 3x \cdot dx$.

$$\text{Es } H = \int \operatorname{sen}^2 3x \cdot \cos^2 3x \cdot \operatorname{sen} 3x \cdot dx = - \frac{1}{3} \int (1 - \cos^2 3x) \cdot \cos^2 3x \cdot d\cos 3x =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\int \cos^4 3x \cdot d\cos 3x - \int \cos^2 3x \cdot d\cos 3x\right] =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{\cos^5 3x}{5} - \frac{\cos^3 3x}{3}\right] + C.$$

Ejercicio F/8-4. Calcular $\int \operatorname{sen}^2 2x \cdot \cos^2 2x \cdot dx$.

$$\text{Es } I = \int \operatorname{sen}^2 2x \cdot \cos^2 2x \cdot dx = \int (\operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x)^2 \cdot dx = \int \left(\frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 4x\right)^2 \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \operatorname{sen}^2 4x \cdot dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 8x}{2} \cdot dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos 8x \cdot dx\right] =$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{64} \cdot \operatorname{sen} 8x + C.$$

Ejercicio F/8-4. Resolver la integral $\int \frac{1}{\cos^6 x} \cdot dx$.

$$\text{Será } I = \int \frac{1}{\cos^6 x} dx = \int \frac{1}{\cos^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 \cdot \operatorname{tg}' x \cdot dx,$$

lo que haciendo el cambio $\operatorname{tg} x = t$ nos permite escribir:

$$I = \int (1 + t^2)^2 \cdot dt = \int (1 + 2t^2 + t^4) \cdot dt = t + \frac{2}{3} \cdot t^3 + \frac{1}{5} \cdot t^5 + C =$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^5 x + C.$$

Ejercicio F/8-5. Resolver la integral $\int \frac{1}{\text{sen}^3x \cdot \cos^3x} \cdot dx.$

$$\text{Es } I = \int \frac{1}{\text{sen}^3x \cdot \cos^3x} \cdot dx = \int \text{cosec}^3x \cdot \sec x \cdot \text{tg}'x \cdot dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{\text{tg}^2x}\right)^{3/2} \cdot (1 + \text{tg}^2x)^{1/2} \cdot \text{tg}'x \cdot dx = \int \frac{(\text{tg}^2x + 1)^2}{\text{tg}^3x} \cdot \text{tg}'x \cdot dx\,,$$

lo que haciendo $\text{tg}x = t$ nos permite escribir:

$$I = \int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3} \cdot dt = \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^3} \cdot dt = \int t \cdot dt + 2 \int \frac{1}{t} \cdot dt + \int \frac{1}{t^3} \cdot dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2 \cdot \ln t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} + C = \frac{\text{tg}^2x}{2} + 2 \cdot \ln(\text{tg}x) - \frac{\text{cotg}^2x}{2} + C.$$

Ejercicio F/9-1. Resolver la integral $\int \text{ch}^2x \cdot dx.$

$$\text{Es } \int \text{ch}^2x \cdot dx = \int \frac{1}{2}(\text{ch}2x + 1) \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \text{sh}2x + \frac{1}{2}x + C.$$

Ejercicio F/9-2. Resolver la integral $\int \text{ch}^3x \cdot dx.$

$$\text{Es } \int \text{ch}^3x \cdot dx = \int \text{ch}^2x \cdot \text{ch}x \cdot dx = \int \text{ch}^2x \cdot d(\text{sh}x) = \int (1 + \text{sh}^2x) \cdot d(\text{sh}x) =$$

$$= \text{sh}x + \frac{\text{sh}^3x}{3} + C.$$

Ejercicio F/9-3. Resolver la integral $\int \frac{1}{\text{sh}^2x + \text{ch}^2x} \cdot dx.$

En este caso sustituiremos $\text{sh}x$ y $\text{ch}x$ respectivamente por sus valores en función de e^x, es decir, $\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Tendremos pues:

$$I = \int \frac{1}{\text{sh}^2x + \text{ch}^2x} \cdot dx = \int \frac{1}{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} \cdot dx = 2 \int \frac{1}{e^{2x} + e^{-2x}} \cdot dx.$$

Haciendo ahora el cambio $e^{2x} = t$, o lo que es igual, $x = (1/2) \cdot \ln t$, lo que implica en particular que $dx = (1/2t) \cdot dt$, la integral nos queda:

$$I = 2 \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{2t} \cdot dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} \cdot dt = \text{arctg}\,t + C = \text{arctg}\,e^{2x} + C.$$

Ejercicio F/9-4. Resolver la integral $\int \text{tgh}^3x \cdot dx.$

$$\text{Es } \int \text{tgh}^3x \cdot dx = \int \frac{\text{sh}^3x}{\text{ch}^3x} \cdot dx = \int \frac{\text{sh}^2x}{\text{ch}^3x} \cdot \text{sh}x \cdot dx = \int \frac{(\text{ch}^2x - 1)}{\text{ch}^3x} \cdot d\,\text{ch}x =$$

$$= \int \frac{1}{\text{ch}x} \cdot d\,\text{ch}x - \int \frac{1}{\text{ch}^3x} \cdot d\,\text{ch}x = \ln(\text{ch}x) + \frac{1}{\text{ch}^2x} + C.$$

Ejercicio F/9-5. Resolver la integral $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}} \cdot dx.$

Hacemos el cambio $x + 1 = t^6$, con lo que es $x = t^6 - 1$ y $dx = 6t^5 \cdot dt$. La integral se nos convertirá pues en:

$$\int \frac{t^6 - 1}{t^2 - t^3} \cdot 6t^5 \cdot dt = 6 \int \frac{t^6 - 1}{1 - t} \cdot t^3 \cdot dt = 6 \int \frac{t^6 - 1}{1 - t} \cdot t^3 \cdot dt = 6 \int \frac{t^9 - t^3}{1 - t} \cdot dt = -6 \int \frac{t^9 - t^3}{t - 1} \cdot dt =$$

$$= -6 \int (t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3) \cdot dt = -6 \left[\frac{t^9}{9} + \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^8}{6} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4}\right] + C,$$

con lo que nos bastará sustituir t por $(x + 1)^{1/6}$.

Ejercicio F/9-6. Resolver la integral $I = \int \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 1}} \cdot dx.$

Hacemos el cambio $\sqrt{-x^2 + x + 1} = tx + 1$, que nos dice que es $x = \frac{1 - 2t}{t^2 + 1}$ y que por tanto es $dx = \frac{2t^2 - 2t - 2}{(t^2 + 1)^2} \cdot dt$ y $\sqrt{-x^2 + x + 1} = \frac{-t^2 + t + 1}{t^2 + 1}$.

La integral se nos convertirá por tanto en:

$$I = \int \frac{\frac{1 - 2t}{t^2 + 1}}{\frac{-t^2 + t + 1}{t^2 + 1}} \cdot \frac{2t^2 - 2t - 2}{(t^2 + 1)^2} \cdot dt = 2 \cdot \int \frac{2t - 1}{(t^2 + 1)^2} \cdot dt = 2 \cdot J.$$

Para calcular J utilizaremos el Método de Hermite, para ello escribimos:

$$\frac{2t - 1}{(t^2 + 1)^2} = \left(\frac{At + B}{t^2 + 1}\right)' + \frac{Ct + D}{t^2 + 1},$$

lo que nos lleva a que sea

$$2t - 1 = Ct^3 + (-A + D)t^2 + (-2B + C)t + (A + D)$$

y que consiguientemente sea

$$A = -1/2,\ B = -1,\ C = 0 \text{ y } D = -1/2,$$

$$J = \int \frac{2t - 1}{(t^2 + 1)^2} \cdot dt = \frac{-\frac{1}{2}t - 1}{t^2 + 1} + \int \frac{-\frac{1}{2}}{t^2 + 1} dt = \frac{-\frac{1}{2}t - 1}{t^2 + 1} - \frac{1}{2} \cdot \text{arctg}\,t,$$

y que, por tanto, es

$$I = \frac{-t - 2}{t^2 + 1} - \text{arctg}\,t = \frac{\frac{1 - \sqrt{-x^2 + x + 1}}{x} - 2}{\left(\frac{\sqrt{-x^2 + x + 1} - 1}{x}\right)^2 + 1} - \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{-x^2 + x + 1} - 1}{x}\right) + C.$$

Ejercicio F/10-1. Resolver la integral $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} dx$.

Haciendo el cambio $x = 3 \cdot \operatorname{sen} t$, la integral se nos convierte en

$$I = 3 \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} \cdot dt = 3 \int \frac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t} \cdot dt = 3 \left[\int \frac{1}{\operatorname{sen} t} \cdot dt - \int \operatorname{sen} t \cdot dt \right],$$

y como la integral $\int \frac{1}{\operatorname{sen} t} \cdot dt$ al hacer el cambio $y = \operatorname{tg}(t/2)$, se nos convierte en

$$\int \frac{1}{\frac{2y}{1+y^2}} \frac{2}{1+y^2} dy = \ln y = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right),$$

y, por tanto, será

$$I = 3 \cdot \ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) + 3 \cos t + C = 3 \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\operatorname{arcsen} \frac{x}{3}}{2} \right) + 3 \cos \left(\operatorname{arcsen} \frac{x}{3} \right) + C =$$

$$= 3 \cdot \ln \left(\frac{3 - \sqrt{9-x^2}}{3 + \sqrt{9-x^2}} \right)^{1/2} + \sqrt{9-x^2} + C.$$

Ejercicio F/10-2. Resolver la integral $\int x^2 \cdot (1-x^2)^{-3/2} \cdot dx$.
Hacemos en primer lugar el cambio $x^2 = t$, o lo que es igual, $x = t^{1/2}$, con lo que es $dx = (1/2) \cdot t^{-1/2} \cdot dt$, lo que convierte a la integral dada en:

$$I = \int t \cdot (1-t)^{-3/2} \cdot (1/2) \cdot t^{-1/2} \cdot dt = \frac{1}{2} \int t^{1/2} \cdot (1-t)^{-3/2} \cdot dt = \frac{1}{2} \int t^{-1} \cdot \left(\frac{1-t}{t} \right)^{-3/2} \cdot dt.$$

Llegados a esta situación, hacemos el cambio $y^2 = \frac{1-t}{t}$, o lo que es igual $t = \frac{1}{y^2+1}$, con lo que es $dt = \frac{-2}{(y^2+1)^2}$, y la integral I se convierte en

$$I = \frac{1}{2} \int (y^2+1) \cdot \frac{1}{y^3} \cdot \frac{-2y}{(y^2+1)^2} \cdot dy = -\int \frac{1}{y^2(y^2+1)} \cdot dy.$$

La fracción que aparece en la última integral se descompone en una suma de la forma

$$\frac{A}{y^2} + \frac{B}{y} + \frac{Cy+D}{y^2+1},$$

debiendo ser

$$1 = (B+C)y^3 + (A+D)y^2 + By + A,$$

lo que fuerza a que sea

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 0 \text{ y } D = -1.$$

Consiguientemente, es

$$I = -\int \frac{1}{y^2} \cdot dy + \int \frac{1}{y^2+1} \cdot dy = \frac{1}{y} + \operatorname{arctg} y + C = \sqrt{\frac{t}{1-t}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t}{t}} + C =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} + C.$$

Ejercicio F/10-3. Resolver la integral $I = \int \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{1+x^3}} \cdot dx$.

Hacemos el cambio $x^3 = t$, con lo que la integral se convierte en

$$I = \int t^{-1/3} \cdot (1+t)^{-1/3} \cdot \frac{1}{3} \cdot t^{-2/3} \cdot dt = \frac{1}{3} \int t^{-1} \cdot (1+t)^{-1/3} \cdot dt.$$

Hacemos ahora el cambio $1 + t = z^3$. con lo que es

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{1}{z^3-1} \cdot \frac{1}{z} \cdot 3z^2 \cdot dz = \int \frac{z}{z^3-1} dz.$$

La fracción $\frac{z}{z^3-1}$ se descompone de la forma $\frac{\frac{1}{3}}{z-1} + \frac{-\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}}{z^2+z+1}$, con lo que tenemos:

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{1}{z-1} dz - \frac{1}{3} \int \frac{z-1}{z^2+z+1} \cdot dz = \frac{1}{3} \ln (z-1) - \frac{1}{3} \int \frac{z-1}{z^2+z+1} \cdot dz.$$

Al ser $\int \frac{z-1}{z^2+z+1} dz = \int \frac{z-1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dz$

aplicando ahora la fórmula de F/6, caso III, hallamos su valor, que resulta ser

$$\frac{1}{2} \ln (z^2+z+1) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}} \right) + C, \text{ con lo que}$$

$$I = \frac{1}{3} \ln (z-1) - \frac{1}{6} \ln \left[\left(\sqrt[3]{1+t}\right)^2 + \sqrt[3]{1+t} + 1 \right] + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt[3]{1+t}+1}{\sqrt{3}} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left(\sqrt[3]{1+x^3} - 1\right) - \frac{1}{6} \ln \left[\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 + \sqrt[3]{1+x^3} + 1 \right] + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

Ejercicio F/11-1. Calcular el área de la región delimitada por la parábolas $y = x^2$, $y = (1/2) \cdot x^2$ y la recta $y = 2x$.
La región delimitada por las tres líneas es la de la figura 1, y por tanto su área será:

$$A = \left[\int_0^2 x^2 \cdot dx - \int_0^2 \frac{1}{2}\, x^2 \cdot dx\right] + \left[\int_2^4 2x\, dx - \int_2^4 \frac{1}{2}\, x^2\, dx\right] =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}\, x^2\, dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{1}{2}\, x^2\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 + \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_2^4 = \frac{8}{6} + \left[\left(16 - \frac{64}{6}\right) - \left(4 - \frac{8}{6}\right)\right] = 4.$$

Fig. 1

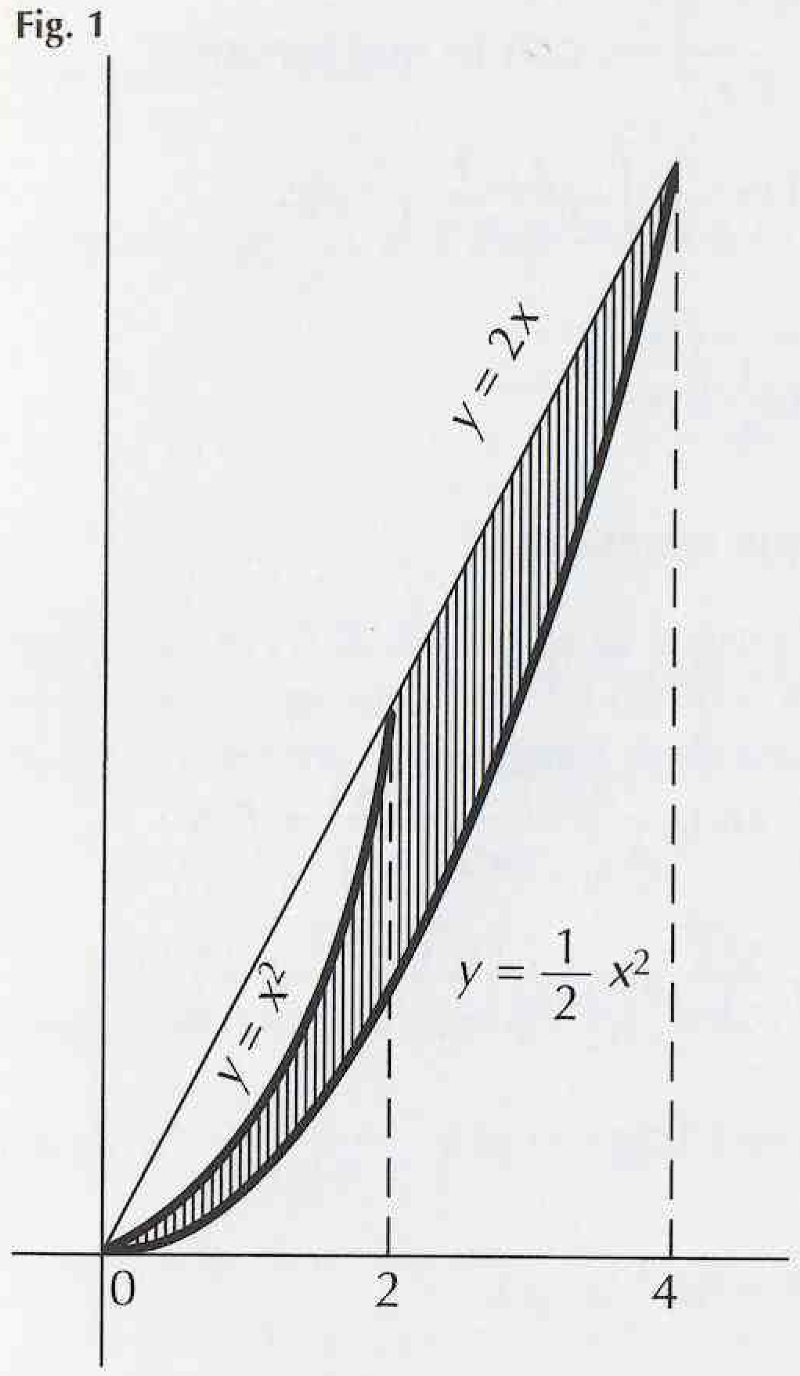
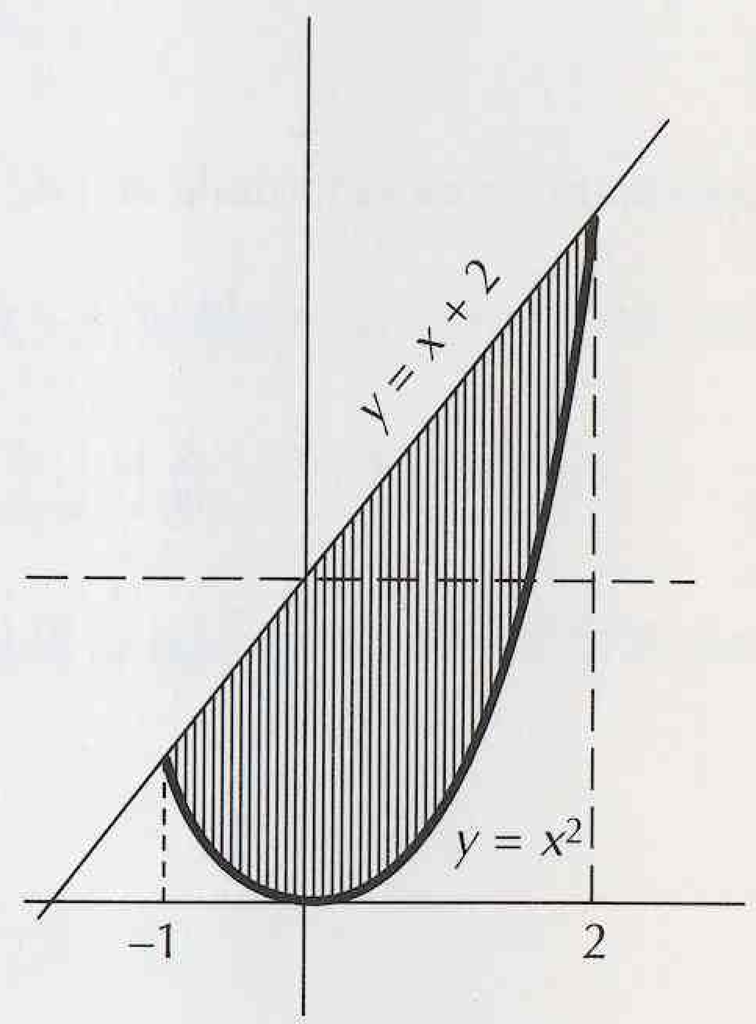


Fig. 2



Ejercicio F/11-2. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x$ e $y = x^2 - 2$.
La representación gráfica de dicha región queda en parte por debajo del eje de abscisas. Si hacemos una traslación según el vector (0, 2), las funciones que delimitan dicha región serán $y = x + 2$ e $y = x^2$, con lo que la región se transforma en la indicada en la figura 2, quedando toda ella por encima del eje de abscisas. Al ser invariante por traslaciones el área de una región, tendremos que el área pedida valdrá:

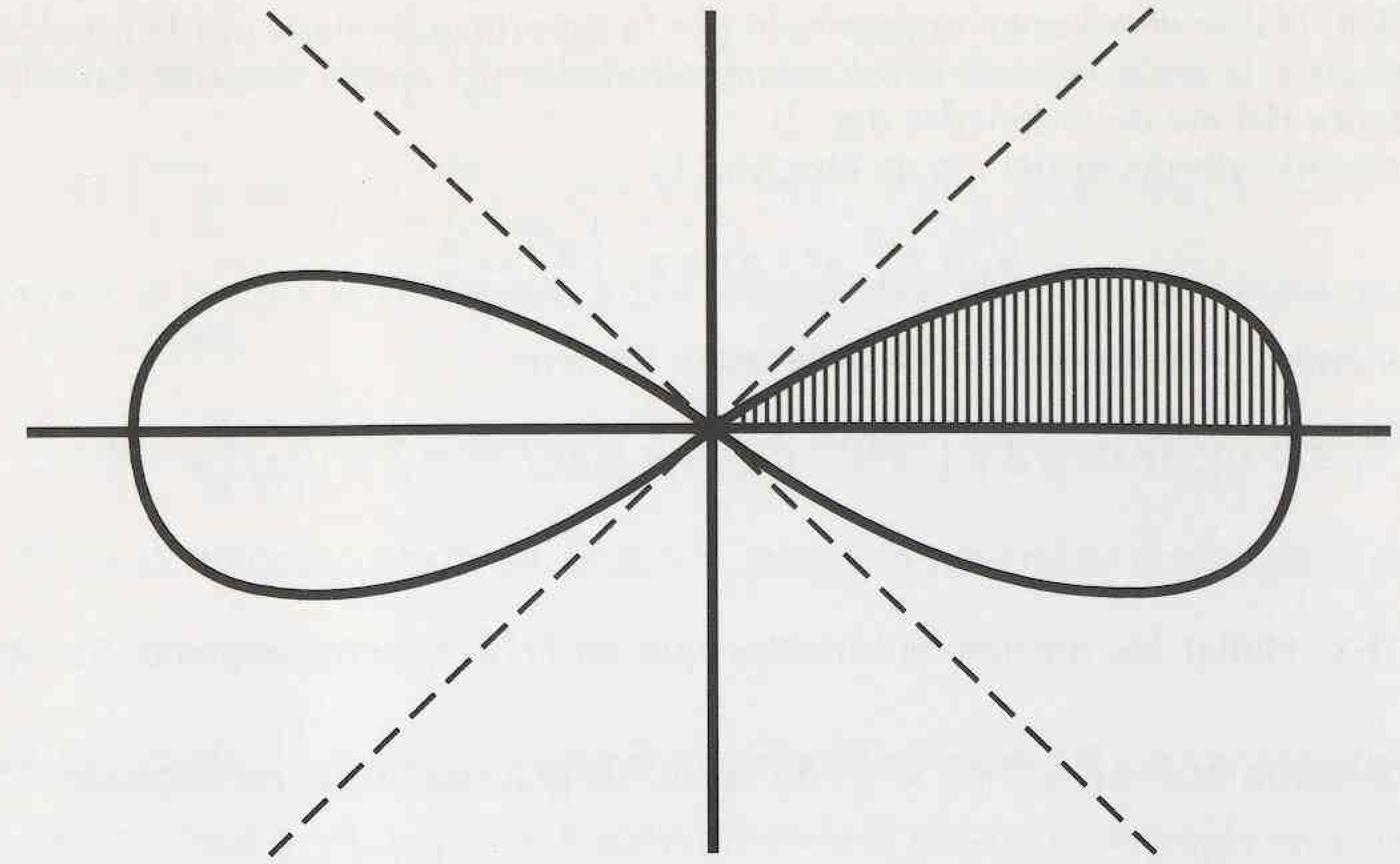
$$A = \int_{-1}^2 \left[(x + 2) - x^2\right] \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{25}{6}.$$

Ejercicio F/11-3. Hallar el área de la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli $r^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$.
Como la curva es simétrica, determinamos primero el área de una cuarta parte, siendo ésta

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cdot \cos 2\varphi \cdot d\varphi = \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4},$$

de donde el área de la lemniscata es a^2.

Fig. 3



Ejercicio F/12-1. Calcular la longitud del arco de curva dada por $f(x) = x^{3/2}$ desde el origen hasta el punto (4, 8).
Será $L = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}\, x} \cdot dx$, y haciendo el cambio $1 + (9/4)x = t^2$, es $dx = (8/9)t \cdot dt$, de donde es

$$L = \frac{8}{9} \int_1^{\sqrt{10}} t^2 \cdot dt = \frac{8}{9} \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{10}} = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

Fig. 1

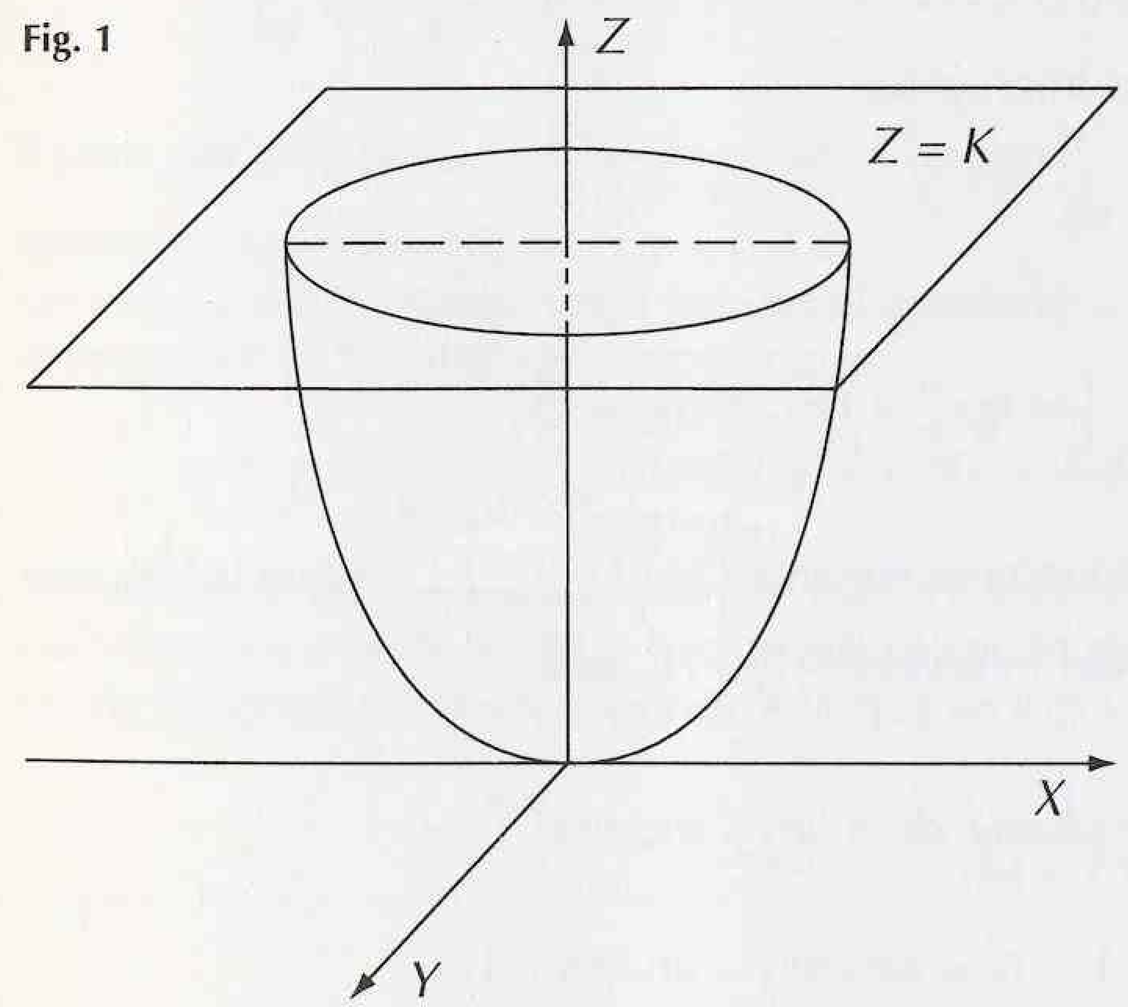
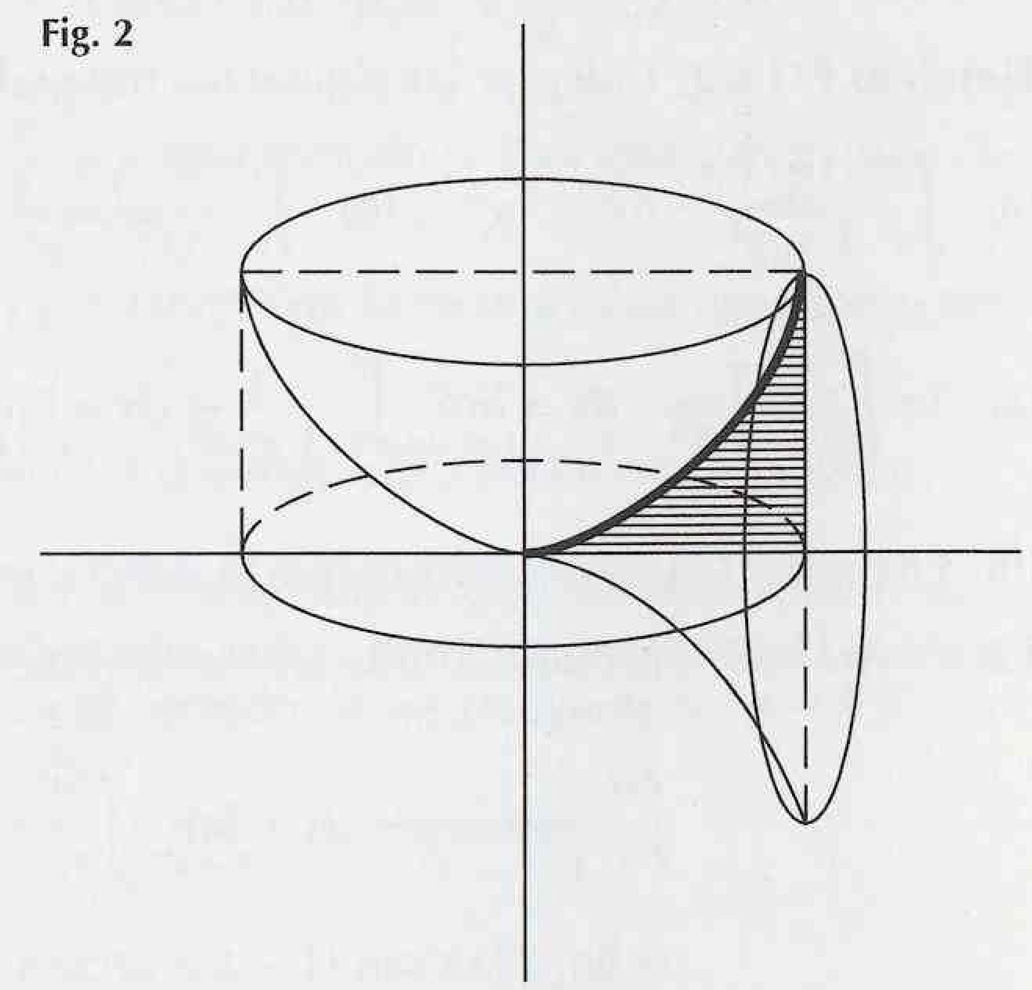


Fig. 2



Ejercicio F/12-2. Hallar el volumen del paraboloide elíptico $a^2x^2 + b^2y^2 - z = 0$ desde la altura $z = 0$ hasta la altura $z = k$. (Ver figura 1).
La sección del paraboloide dado con cada plano paralelo a $z = 0$ es una elipse; la ecuación de la elipse relativa a la altura z es $\frac{x^2}{(z/a^2)} + \frac{y^2}{(z/b^2)} = 1$, y por tanto sus semiejes son $\frac{\sqrt{z}}{a}$ y $\frac{\sqrt{z}}{b}$, de donde el área de esta elipse es $(\pi z)/ab$. Así, pues, la función $f(z) = \pi z/ab$ que nos da el área de la sección para cada altura z es continua, de donde el volumen del paraboloide desde la altura $z = 0$ hasta la altura $z = k$ es

$$V = \int_0^K \frac{\pi}{ab} \cdot z \cdot dz = \frac{\pi}{ab} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^K = \frac{\pi \cdot K^2}{2ab}.$$

Ejercicio F/12-3. Hallar el volumen engendrado por la superficie limitada por la función $f(x) = x^{3/2}$, el eje de abscisas y la recta $x = 1$ al revolucionar alrededor del eje de abscisas. Lo mismo si revoluciona alrededor del eje de ordenadas (fig. 2).

(*a*). Revolucionando alrededor del eje de abscisas. Es:

$$V_x = \pi \int_0^1 x^3 \cdot dx = \pi \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(*b*) Revolucionando alrededor del eje de ordenadas. Se tiene

$$V_y = 2\,\pi \int_0^1 xy\,dx = 2\,\pi \int_0^1 x\, x^{3/2}\,dx = 2\,\pi \int_0^1 x^{5/2}\,dx = 2\,\pi \left[\frac{x^{7/2}}{7/2}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{7}\;.$$

Ejercicio F/13-1. Hallar los mismos volúmenes que en F/12-3, pero mediante los Teoremas de Guldin.

El área S de la región es $S = \int_0^1 x^{3/2}\,dx = \frac{2}{5}$. Su centro de gravedad tiene coordenadas

$$x_G = \frac{\int_0^1 x \cdot x^{3/2}\,dx}{2/5} = \frac{5}{2}\int_0^1 x^{5/2}\,dx = \frac{5}{7},\; y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 x^3\,dx}{2/5} = \frac{5}{16}\;.$$

Por tanto, los volúmenes V_x, V_y generados al girar en torno al eje de abscisas y de ordenadas, respectivamente, son

$$V_x = \frac{2}{5}\cdot 2\pi\, y_G = \frac{2}{5}\cdot 2\pi \cdot \frac{5}{16} = \frac{\pi}{4},\; V_y = \frac{2}{5}\,2\pi\, x_G = \frac{2}{5}\cdot 2\pi \cdot \frac{5}{7} = \frac{4\pi}{7}.$$

Ejercicio F/13-2. Calcular las siguientes integrales impropias:

$$(a)\quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\cdot dx \qquad \text{y} \qquad (b)\quad \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx.$$

$$(a)\quad \text{Es } \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}x\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg}t = \frac{\pi}{2},$$

(*b*) En primer lugar observamos que la integral propuesta es efectivamente impropia ya que la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ no está definida en los extremos del intervalo $[-1, +1]$. Será:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \lim_{t\to 0^+}\int_{-1+t}^{1-t}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\operatorname{arcsen}x\right]_{-1+t}^{1-t} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left\{\operatorname{arcsen}(1-t) - \operatorname{arcsen}(-1+t)\right\} = \operatorname{arcsen}1 - \operatorname{arcsen}(-1) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Ejercicio F/13-3. Demostrar que $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \le 1$.

$$\text{Es } \int_a^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{K\to+\infty}\int_a^K \frac{1}{x}\,dx = \lim_{K\to+\infty}\left[\ln x\right]_a^K = \lim_{K\to+\infty}\left[\ln K - \ln a\right] = +\infty.$$

Luego, para $\alpha = 1$ la integral es divergente, y por el criterio de comparación lo será para $\alpha < 1$. Sea ahora, pues, $\alpha > 1$. Será:

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\cdot dx = \lim_{K\to+\infty}\int_a^K x^{-\alpha}\cdot dx = \lim_{K\to+\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^K = \lim_{K\to+\infty}\frac{K^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

por ser $\lim_{k\to+\infty} K^{1-\alpha} = 0$, a consecuencia de ser $\alpha > 1$. Luego, la integral es convergente para $\alpha > 1$.

Ejercicio F/14-1. Calcular $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ por el Método de los trapecios y por el Método de Simpson, tomando en ambos casos $n = 4$. Calcular π aprovechando el resultado obtenido en ambos métodos, comparando de este modo la bondad de los mismos.

(*a*) Subdividiendo $[0, 1]$ en cuatro partes iguales, tendremos $\delta = 1/4$ y la siguiente tabla de valores

x	$x_0 = 0$	$x_1 = 1/4$	$x_2 = 1/2$	$x_3 = 3/4$	$x_4 = 1$
y	$y_0 = 1$	$y_1 = 0{,}9412$	$y_2 = 0{,}8000$	$y_3 = 0{,}6400$	$y_4 = 0{,}5000$

de donde, por la fórmula de los trapecios será:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\cdot dx \simeq \frac{1}{4}\left[\frac{1+0{,}5000}{2} + 0{,}942 + 0{,}8000 + 0{,}7828\right] = \frac{1}{4}\,(3{,}1312).$$

Como por otro lado, es $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\cdot dx = \left[\operatorname{arctg}x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, por éste método, y con esta subdivisión del intervalo, tenemos que es $\pi \simeq 3{,}1312$.

(*b*) Con la misma subdivisión que en el apartado (*a*) y por tanto, con la misma tabla de valores, tendremos por el Método de Simpson que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\cdot dx \simeq \frac{1}{12}\left[(1{,}0000 + 0{,}5000) + 4(0{,}9412 + 0{,}6400) + 2(0{,}8000)\right] = \frac{1}{4}\,[3{,}1416]$$

lo que pone de manifiesto que por este método y con la misma subdivisión del intervalo el valor hallado para π es de 3,1416, lo que indica ya, de cierto modo, que la precisión lograda con el Método de Simpson suele ser superior a la que se logra con el Método de los trapecios.

Ejercicio F/14-2. Calcular $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2 \cdot dx$, por el Método de Taylor, y valorar el error cometido.
Sabemos que es

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(\operatorname{sen})^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}$$

estando θ comprendido entre 0 y x.
Por tanto, será

$$\operatorname{sen} x^2 = x - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \frac{(\operatorname{sen})^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} \cdot x^{4n+4}$$

con $0 < \theta < x$. Luego, si tomamos

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2 \cdot dx \simeq \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!}\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1.320} - \frac{1}{75.600}\right] = \frac{258.019}{831.600} = 0{,}3102681$$

cometemos un error ε que cumple:

$$\varepsilon \leq \left|\frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} \cdot x^{4n+4}\right| < \frac{1}{10!} = \frac{1}{3.628.800},$$

lo que en particular nos dice que el error cometido es inferior a una millonésima, lo que indica que cuando escribimos

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2 \cdot dx = 0{,}310268$$

las cinco primeras cifras decimales son exactas.

Ejercicio F/15-1. Desarrollar en serie de potencias la función exponencial e^x.
Mediante la Fórmula de Taylor se puede establecer el desarrollo finito

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{hx} \text{ (donde } 0 < h < 1)$$

Por otra parte, la serie

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

es absolutamente convergente en todo **R**, pues su radio de convergencia es

$$r = \lim \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim (n+1) = +\infty.$$

Por lo tanto, será $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, siempre y cuando la sucesión de restos enésimos de la Fórmula de Taylor tienda a 0. Pero

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{hx} = e^{hx} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^{hx} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{e^{-(n+1)} \cdot (n+1)^{n+1} \sqrt{2\pi (n+1)}} =$$

$$= e^{hx} \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{xe}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi (n+1)}} = e^{hx} \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

CUADRO DE MATERIAS E ÍNDICE

MATERIAS

ÍNDICE